

V. Aplicacions del Desenvolupament de Taylor

Guillermo González Casado

Setembre del 2000

8 Càlcul aproximat de funcions

El polinomi i la sèrie de Taylor són eines matemàtiques que, entre d'altres coses, permeten calcular el valor de les funcions trigonomètriques, logrítmiques i exponencials (entre d'altres) amb una precisió arbitrària, només limitada per l'eina de càlcul que fem servir. Actualment, per fer aquests càlculs existeixen computadores de més o menys potència (des de calculadores de butxaca fins a superordinadors). Antigament, però, s'havia de calcular amb llapis i paper o fent servir taules prèviament calculades. En qualsevol cas, l'avantatge de la teoria matemàtica que s'ha explicat en el tema anterior prové de dos fets bàsics:

- Ens permet aproximar el valor d'una funció qualsevol mitjançant un cert polinomi (el de Taylor), i per tant només calen operacions aritmètiques elementals com sumes, restes i productes (fàcilment programables).
- Podem conèixer l'exactitud de l'aproximació que fem, és a dir, determinar l'error màxim comès quan fem servir el polinomi de Taylor per evaluar una funció en un punt.

Ja hem vist en el tema anterior els mètodes per obtenir el polinomi i la sèrie de Taylor d'una funció. Recordem que si tallem una sèrie de Taylor d'una funció a un cert grau n , el resultat és el polinomi de Taylor de grau n de la mateixa funció. Per tant, l'únic punt que encara no hem tractat és el segon, el càlcul de l'error. Hi han dues maneres de fer aquest càlcul:

1. Fer servir la funció residu i acotar el seu valor mitjançant la fórmula de Lagrange.
2. Utilitzar els mètodes d'acotació del error quan aproximem la suma d'una sèrie mitjançant un nombre finit dels seus termes.

Del segon mètode ja es va parlar amb detall en la secció dedicada a la suma de sèries numèriques (veure tema III), per tant ara ens centrarem principalment en el mètode que fa servir la funció residu. Val a dir que hi han funcions en que es poden fer servir ambdós mètodes. Per clarificar idees començarem posant un exemple d'aquest tipus.

8.1 Exemple

Volem deduir l'expressió d'un polinomi que ens permeti calcular el valor de $\sin x$ a $x = 1$ amb una precisió de 10^{-6} . Per això farem servir un cert polinomi de Taylor al voltant del zero, $P_N(x)$. El grau N vindrà determinat per la precisió que volem a través de la funció residu, que ens dóna la diferència entre la funció i el polinomi que l'aproxima,

$$|\sin(1) - P_N(1)| = |R_N(1)|.$$

Com ja hem vist en el tema anterior (secció 7.2.2) el polinomi de Taylor de la funció $\sin x$ només té termes de grau senar. Per tant si agafem N senar tenim que

$$|\sin(1) - P_N(1)| = |\sin(1) - P_{N+1}(1)| = |R_{N+1}(1)|.$$

Fent servir la fórmula de Lagrange per al residu

$$R_{N+1}(x) = \frac{(-1)^{\frac{N+1}{2}} \cos(z) x^{N+2}}{(N+2)!} \Rightarrow |R_{N+1}(1)| = \left| \frac{(-1)^{\frac{N+1}{2}} \cos(z)}{(N+2)!} \right| \leq \frac{1}{(N+2)!}.$$

Com que volem una precisió de 10^{-6} hem de trobar el mínim valor de N senar tal que

$$\frac{1}{(N+2)!} < 10^{-6} \Leftrightarrow (N+2)! > 10^6.$$

Això garantirà que el valor del residu a $x = 1$ és més petit que 10^{-6} i per tant que la diferència entre $\sin(1)$ i el polinomi de Taylor que trobem també ho serà. Fent uns quants factorials trobem que per a $N = 7$, $9! = 362880$ i per a $N = 9$, $11! = 39916800$. Aleshores el grau del polinomi de Taylor és 9. Com que

$$P_9(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

substituint $x = 1$ trobem l'expressió següent:

$$\sin(1) = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} + \frac{1}{362880} \pm 10^{-6}.$$

Veiem com resoldriem el mateix problema fent servir la sèrie de Taylor. Sabem que per a tot nombre real x

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

i per tant, substituïnt $x = 1$ obtenim una sèrie numèrica

$$\sin(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}.$$

Es tracta evidentment d'una sèrie alternada convergent ja que s'aplica el criteri de Leibniz. Si aproximem $\sin(1)$ per la suma de n termes de la sèrie aleshores l'error comès està acotat pel valor absolut del terme $n+1$ (veure tema III). Per tant es tracta de trobar el mínim valor de n tal que:

$$|R_{n+1}| < \left| \frac{(-1)^{n+1}}{[2(n+1)+1]!} \right| = \frac{1}{(2n+3)!} < 10^{-6}.$$

Això passa per a $n = 4$, ja que com hem vist abans $11! > 10^6$. Per tant sumarem la sèrie fins a $n = 4$ inclòs, i el resultat obtingut és idèntic a l'anterior com es pot comprovar fàcilment. A vegades, el mètode de la sèrie alternada dóna una acotació millor que el residu de Lagrange.

8.2 Exemple

Veiem com es pot calcular el número e amb la precisió d'una calculadora científica corrent. Aquestes solen donar els resultats amb 10 xifres decimals és a dir, una precisió de 10^{-10} . Si considerem la sèrie de Taylor de la funció exponencial, vàlida per a qualsevol nombre real x ,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

i substituïm $x = 1$ obtenim que e és igual a la suma d'una sèrie numèrica

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Malhauradament, per acotar l'error de la suma no podem aplicar el criteri integral de Cauchy. Tampoc es tracta d'una sèrie alternada, i, en aquest cas, el criteri del quocient resulta una mica feixuc d'aplicar.

Considerem doncs el mateix problema fent servir el polinomi de Taylor i la funció residu al voltant del zero, tenim que:

$$R_N(x) = \frac{e^{\theta x} x^{N+1}}{(N+1)!}, \quad 0 < \theta < 1$$

i substituïnt $x = 1$ s'obté

$$|e - P_N(1)| = |R_N(1)| = \frac{e^{\theta}}{(N+1)!} < \frac{3}{(N+1)!},$$

on s'ha fet l'acotació $e^\theta < e < 3$. És cert que podem haver utilitzat una altra acotació més o menys aproximada, però també és cert que es coneixen teoremes que acoten el valor del número e entre 2 i 3 i per tant és normal que fem servir aquesta informació. Es podria dir que acotacions més properes com 2.8 ó 2.72 anirien millor, però la diferència amb 3 és tan poca que el grau del polinomi de Taylor resultant no canvia gens.

El que hem de fer ara és trobar el mínim valor de N tal que

$$\frac{3}{(N+1)!} < 10^{-10} \Rightarrow (N+1)! > 3 \cdot 10^{10},$$

i amb això obtindrem el valor de e amb la precisió que volem mitjançant el polinomi de Taylor de grau N . Fent càlculs: $13! = 6227020800 \approx 0.6 \cdot 10^{10}$, $14! = 87178291200 \approx 8.7 \cdot 10^{10} > 3 \cdot 10^{10}$. Per tant necessitem el polinomi de Taylor de grau 13,

$$e = P_{13}(1) \pm 10^{-10} = \sum_{n=0}^{13} \frac{1}{n!} \pm 10^{-10}.$$

8.3 Exemple

Es tracta de trobar un polinomi que ens permeti calcular el valor de la funció $\cos x$ amb una precisió de 10^{-10} . En aquest cas no considerem un valor concret de $\cos x$, sinó tots els possibles valors que pot prendre aquesta funció. Hem de tenir en compte que es tracta d'una funció periòdica amb període 2π ,

$$\cos x = \cos(x + 2\pi n), \quad \forall n \in \mathbf{Z}.$$

Per tant, n'hi ha prou amb considerar l'interval $[-\pi, \pi]$ per obtenir tots els valors diferents d'aquesta funció. Encara podem reduir més aquest interval si tenim en compte que $\cos x$ és una funció parell (simètrica respecte a l'eix d'ordenades)

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

i més a més la relació entre angles suplementaris

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x).$$

Amb tot això tenim que n'hi ha prou amb conèixer els valors de $\cos x$ a l'interval $[0, \pi/2]$ per poder determinar la resta de valors sobre el domini dels nombres reals. Si calculem la fórmula de Taylor al voltant del zero obtenim per a N parell

$$\cos x = \sum_{n=0}^{N/2} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \frac{(-1)^{\frac{N+2}{2}} \sin(\theta x)}{(N+2)!} x^{N+2}, \quad 0 < \theta < 1.$$

On s'ha agafat el residu $N+1$ donat que el polinomi de Taylor només té termes de grau parell. Aleshores hem de determinar el mínim valor de N parell tal que

$$|R_{N+1}(x)| = \frac{|(-1)^{\frac{N+2}{2}} \sin(\theta x)|}{(N+2)!} |x|^{N+2} < 10^{-10}, \quad \forall x \in [0, \pi/2].$$

Podem prendre $\pi < 4$ i llavors $\pi/2 < 2$. Això es prou aproximat al valor real com per no produir canvis significatius al resultat final. Per tant, trobem l'acotació següent del residu:

$$|R_{N+1}(x)| \leq \frac{|x|^{N+2}}{(N+2)!} \leq \frac{|\pi/2|^{N+2}}{(N+2)!} < \frac{2^{N+2}}{(N+2)!}, \quad \forall x \in [0, \pi/2].$$

La desigualtat que hem de resoldre per a N parell serà doncs

$$\frac{2^{N+2}}{(N+2)!} < 10^{-10} \Leftrightarrow \frac{(N+2)!}{2^{N+2}} > 10^{10}.$$

Donant valors a N obtenim que $16!/2^{16} = 319256437.5$ i $18!/2^{18} = 24423117469$. Llaavors el mínim valor de N és 16, és a dir, haurem de fer servir el polinomi de Taylor de grau 16 per calcular $\cos x$ amb una precisió de 10^{-10} a tot el seu domini.

9 Estudi local de funcions

Donat que al voltant d'un punt tota funció suficientment derivable es pot aproximar pel polinomi de Taylor corresponent, l'estudi del comportament d'aquesta funció al voltant d'un punt (anomenat també estudi local de la funció) és pot portar a terme mitjançant el seu polinomi de Taylor. Això simplifica bastant la tasca a realitzar car els polinomis són les funcions més senzilles i les seves propietats són ben conegudes. En aquest apartat descriurem algunes de les eines més habituals basades en polinomis de Taylor per a l'estudi local de funcions i d'altres qüestions relacionades.

9.1 Infinitèsims i càlcul de límits en un punt

El concepte d'infinitèsim va ser introduït al tema II (secció 4.7) per les successions, i també es va comentar en aquella ocasió que s'aplica igualment a funcions. Recordarem de nou la definició.

- **Definició:** Donades dues funcions $f(x)$ i $g(x)$ tals que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

, diem que $f(x)$ i $g(x)$ són del mateix ordre en $x = a$ si i només si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0 \quad \text{i} \quad \ell \neq \infty$$

Això es representa escrivint $f(x) = O(g(x))$, o bé $g(x) = O(f(x))$. En el cas particular que $\ell = 1$ diem que $f(x)$ i $g(x)$ són dos infinitèsims equivalents en $x = a$, i ho representem de forma abreujada escrivint $f(x) \sim g(x)$.

Ja hem fet servir part de la notació que ha aparegut a la definició anterior per representar sèries de potències o de Taylor de forma abreujada. Per exemple,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6!} + O(x^5),$$

vol dir que la resta de termes de la sèrie de Taylor de $\sin x$ que no apareixen especificats donen lloc a una funció del mateix ordre que x^5 a l'origen. D'altra banda, la fórmula de Taylor per a qualsevol funció (que compleixi les condicions exigides pel teorema de Taylor) es pot escriure de la següent manera:

$$f(x) = P_N(f, a, x) + O((x - a)^{N+1}).$$

Per a un polinomi de Taylor de grau N a l'entorn de $x = a$, la funció residu és sempre del mateix ordre que $(x - a)^{N+1}$ segons estableix la fórmula de Lagrange (veure tema IV).

A partir de l'expressió anterior de la fórmula de Taylor és fàcil veure que el polinomi de Taylor es pot fer servir per deduir un infinitèsim equivalent de la funció $f(x)$ a qualsevol punt $x = a$ on la funció sigui prou vegades derivable.

- **Teorema 1:** Suposem que la primera derivada no nul·la a $x = a$ de la funció $f(x)$ és d'ordre n , amb $n \geq 1$, i suposem que $f(x)$ és almenys $n + 1$ vegades derivable en un entorn del punt a . Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, llavors

$$f(x) = f^{(n)}(a)(x - a)^n + O([x - a]^{n+1}),$$

i això implica que

$$f(x) \sim f^{(n)}(a)(x - a)^n.$$

La demostració d'aquest teorema és senzilla i convé donar-la per acabar de fixar idees. Es tracta de veure a partir de les hipòtesis que $f(x)$ és un infinitèsim equivalent a $f^{(n)}(a)(x - a)^n$ en $x = a$. Per tant hem de demostrar que el límit del quocient entre ambdues funcions és igual a la unitat. Com que $f(x)$ és derivable en $x = a$ també és contínua en aquest punt. Per tant si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ aleshores $f(a) = 0$ i tenim que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{f^{(n)}(a)(x - a)^n} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(a)(x - a)^n + O([x - a]^{n+1})}{f^{(n)}(a)(x - a)^n} = \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow a} \frac{O([x - a]^{n+1})}{f^{(n)}(a)(x - a)^n} = 1 + \lim_{x \rightarrow a} O(x - a) = 1. \end{aligned}$$

Amb això queda provat el teorema.

Aplicant el teorema 1 donem alguns exemples d'infinitèsims en $x = 0$:

$$\begin{aligned} e^x - 1 &\sim x, & \ln(1+x) &\sim x, \\ \cos x - 1 &\sim -\frac{x^2}{2}, & \sin x &\sim x, \\ (1+x)^\alpha - 1 &\sim \alpha x. \end{aligned}$$

També es poden trobar infinitèsims en altres punts, per exemple, en $x = 1$ tenim:

$$\sqrt{x} - 1 \sim \frac{1}{2}(x-1), \quad \ln x \sim x-1.$$

D'altra banda, quan operem dues funcions, fem un canvi de variable, o bé sumem o multipliquem una constant a una funció, l'infinitèsim del resultat no sempre coincideix amb el resultat d'operar els infinitèsims. Per assegurar-se de que no es cometin errors, el que s'ha de fer és recordar que l'infinitèsim equivalent d'una funció sempre és pot calcular a partir del polinomi (o la sèrie) de Taylor de la funció, i per tant convé aplicar aquest mètode sempre.

Per exemple, $\ln(1+x) \sim x$ no implica que un infinitèsim equivalent de la funció $\ln(1+x) - x$ a $x = 0$ sigui zero. La manera correcta de procedir és pendre la sèrie de Taylor al voltant de l'origen

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3) \Rightarrow \ln(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + O(x^3),$$

i després deduir l'infinitèsim en $x = 0$,

$$\ln(1+x) - x \sim -\frac{x^2}{2}.$$

L'aplicació més habitual dels infinitèsims és el càlcul de límits de funcions, ja que aleshores es poden simplificar molt els càlculs. Les regles següents es fan servir per substituir una funció pel seu infinitèsim en el càlcul de límits en un punt. Donada una funció $g(x)$ que pot ser constant (diferent de zero però) i una altra funció $f(x)$ tal que $f(x) \sim p(x)$ en $x = a$, aleshores:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) &= \lim_{x \rightarrow a} p(x) \cdot g(x), & \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{g(x)}, \\ \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} [p(x)]^{g(x)}, & \lim_{x \rightarrow a} [g(x)]^{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} [g(x)]^{p(x)}. \end{aligned}$$

La substitució també es pot fer en el cas de que $f(x)$ estigui en el denominador d'un quocient entre funcions. És incorrecte, però, fer una substitució d'aquesta mena en una suma o una diferència entre funcions, és a dir, en general

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm g(x) \neq \lim_{x \rightarrow a} p(x) \pm g(x).$$

9.1.1 Regla de l'Hôpital

L'anomenada regla de l'Hôpital és un dels mètodes més habituals per resoldre indeterminacions del tipus zero partit per zero. Suposem que $f(a) = g(a) = 0$, aleshores

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}.$$

La regla de l'Hôpital estableix que si f i g son contínues i derivables a l'origen llavors s'aplica la igualtat

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

si el segon límit existeix. Si $f'(a) = g'(a) = 0$ la indeterminació no queda resolta. Per tant cal aplicar de nou la regla de l'Hôpital a les derivades primeres. Així es pot continuar fins que trobem que alguna de les derivades de f ó de g no s'anulla. Si hem de fer varies derivades i les funcions són complicades el càlcul pot ser molt pesat. En canvi, si podem aplicar directament els infinitedsimos la resolució és més ràpida i senzilla. Al cap i a la fi, l'infinitedsim ens dona el primer terme no nul del polinomi de Taylor, i això és el mateix que la primera derivada no nul·la de la funció.

Exemple: Calculeu el límit següent

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{1 - \cos(x/2)}.$$

Clarament es tracta d'una indeterminació del tipus zero partit per zero. Si fem servir infinitedsimos, $\ln(1+x) - x \sim -x^2/2$, com hem vist abans, mentres que,

$$\cos(x/2) = 1 - \frac{(x/2)^2}{2} + O(x^4) \Rightarrow 1 - \cos(x/2) \sim \frac{x^2}{8},$$

i per tant,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{1 - \cos(x/2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2/2}{x^2/8} = \frac{-1/2}{1/8} = -4.$$

El càlcul anterior també ens permet veure que si fem servir la regla de l'Hôpital l'haurem d'aplicar dues vegades ja que els infinitedsimos de les funcions del numerador i del denominador són polinomis de grau 2.

9.1.2 Estudi d'integrals impròpies de segona espècie

Els infinitedsimos també es poden utilitzar a l'estudi d'integrals impròpies de segona espècie, quan es vol aplicar el criteri de comparació al límit. Recordem que si la funció $f(x)$ no està acotada en $x = a$, la integral

$$\int_a^b f(x) dx,$$

s'anomena integral impròpia de segona espècie. Un dels criteris que es pot fer servir per analitzar la seva convergència (conegut com a criteri de comparació al límit) consisteix en trobar una funció $g(x)$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0,$$

on ℓ és un nombre real. Llavors podem substituir f per g a la integral impròpia sense que canviï el seu caràcter convergent o divergent. Normalment, es tracta de que la funció $g(x)$ sigui un polinomi ja que en aquest cas és fàcil resoldre el problema. Per trobar la funció $g(x)$ es pot fer servir un infinitèsim equivalent de $f(x)$ en $x = a$, i concretament, el que es deriva del seu polinomi de Taylor.

Exemple: Analitzeu la convergència de la integral impròpia següent:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x - \sin x}.$$

Clarament es tracta d'una integral impròpia de segona espècie car la funció que estem integrant es fa infinit quan x tendeix cap a zero. Trobem un infinitèsim en $x = 0$ de la funció que s'està integrant:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) \Rightarrow x - \sin x = \frac{x^3}{6} + O(x^5).$$

Això implica que $x - \sin x \sim x^3/6$ i per tant

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x^3}{1/(x - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

Llavors, d'acord amb el criteri de comparació al límit, la integral impròpia de l'enunciat tindrà el mateix caràcter que

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3},$$

la qual és clarament divergent.

9.2 Extrems relatius i punts d'inflexió

Una part important de l'anàlisi d'una funció és la recerca dels punts on la funció presenta extrems locals (màxims o mínims) i punts d'inflexió. Aquests punts ens informen sobre la variació de la funció al llarg del seu domini, intervals de creixement i la seva curvatura. Per trobar els extrems i punts d'inflexió d'una funció és necessari estudiar el comportament de les seves derivades. En molts casos, però, és més senzill i ràpid utilitzar la sèrie o el polinomi de Taylor de la funció, ja que els seus coeficients es construeixen fent derivades de la funció i avaluant-les en un punt. Es tracta, doncs, de

fer servir exactament el mateix tipus d'informació d'una manera més eficaç, sobretot si estem estudiant el comportament de la funció al voltant de l'origen com veurem més endavant.

Abans de continuar, però, convé recordar la definició dels conceptes bàsics que ens ocuparan en aquesta secció i algunes de les seves propietats conegudes de cursos anteriors. D'ara en endavant suposarem (tret que s'indiqui el contrari) que $f(x)$ és una funció contínua i almenys dues vegades derivable a tot el seu domini, que existeix un cert interval obert de la recta real, I , dintre del domini de f i que $a \in I$.

- **Definició 1:** La funció $f(x)$ és creixent en $x = a$ si i només si $\forall x \in I$ es verifica que si $x > a$ aleshores $f(x) \geq f(a)$ i si $x < a$ aleshores $f(x) \leq f(a)$. La funció serà estrictament creixent en $x = a$ en el cas que siguin vàlides les desigualtats estrictes en la definició anterior.

Anàlogament, la funció $f(x)$ és decreixent (estricteament decreixent) en $x = a$ si i només si $\forall x \in I$ es verifica que si $x > a$ aleshores $f(x) \leq f(a)$ (respectivament, $f(x) < f(a)$) i si $x < a$ aleshores $f(x) \geq f(a)$ (respectivament, $f(x) < f(a)$).

D'altra banda, una funció $f(x)$ serà creixent (o decreixent) a tot l'interval I si ho és en cadascun dels punts d'aquest interval.

- **Definició 2:** Diem que $f(x)$ té un màxim relatiu (o local) en $x = a$ si i només si $\forall x \in I - \{a\}$, $f(x) - f(a) < 0$. Diem que té un mínim relatiu (o local) si i només $\forall x \in I - \{a\}$, $f(x) - f(a) > 0$. Els màxims i mínims relatius d'una funció s'anomenen extrems relatius o locals.

En alguns llibres s'utilitza la terminologia de extrems relatius estrictes i la definició dels màxims i mínims relatius (no estrictes) s'obté substituint $f(x) - f(a) < 0$ per $f(x) - f(a) \leq 0$ i $f(x) - f(a) > 0$ per $f(x) - f(a) \geq 0$, respectivament.

- **Definició 3:** Sigui $g_a(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ la recta tangent a la funció $f(x)$ en $x = a$. Diem que $f(x)$ és còncaua cap a dalt o que té concavitat positiva (o simplement que és còncaua) en $x = a$ si i només si $\forall x \in I - \{a\}$, $g_a(x) < f(x)$. Diem que $f(x)$ és còncaua cap a baix o té concavitat negativa (o simplement que és convexa) en $x = a$ si i només si $\forall x \in I - \{a\}$, $g_a(x) > f(x)$. La funció $f(x)$ serà còncaua cap a dalt (o cap a baix) a tot l'interval I si ho és a cadascun dels seus punts.
- **Definició 4:** La funció $f(x)$ té un punt d'inflexió en $x = a$ si i només si $\forall x \in I - \{a\}$, la concavitat de $f(x)$ quan $x < a$ és diferent de la concavitat de $f(x)$ quan $x > a$. És a dir, un punt d'inflexió és un punt en el qual canvia el tipus de concavitat de $f(x)$.
- **Definició 5:** Diem que $x = a$ és un punt crític de la funció $f(x)$ si i només si $f'(a) = 0$.

- **Propietat 1:** Si una funció $f(x)$ compleix $f'(a) > 0$ aleshores és estrictament creixent en $x = a$. Si una funció és estrictament creixent en $x = a$, llavors $f'(a) \geq 0$ (no es pot assegurar que la derivada sigui estrictament positiva: la funció $f(x) = x^3$ és estrictament creixent en $x = 0$, però $f'(0) = 0$).

Anàlogament, Si una funció $f(x)$ compleix $f'(a) < 0$ aleshores és estrictament decreixent en $x = a$. Si una funció és estrictament decreixent en $x = a$, llavors $f'(a) \leq 0$.

- **Propietat 2:** Si la funció $f(x)$ té un extrem relatiu en $x = a$ aleshores $f'(a) = 0$. És a dir, tot extrem relatiu és un punt crític.
- **Propietat 3:** Si $f'(a) = 0$ i $f''(a) < 0$ aleshores $f(x)$ té un màxim relatiu en $x = a$ i si $f'(a) = 0$ i $f''(a) > 0$ aleshores té un mínim relatiu en $x = a$.
- **Propietat 4:** Si $f''(a) > 0$, la funció $f(x)$ és còncava cap a dalt en $x = a$, en canvi, si $f''(a) < 0$ és còncava cap a baix. Si és còncava cap a dalt (cap a baix), només es pot assegurar que $f''(a) \geq 0$ (respectivament, $f''(a) \leq 0$).
- **Propietat 5:** Si la funció $f(x)$ té un punt d'inflexió en $x = a$ aleshores $f''(a) = 0$.
- **Propietat 6:** Tot punt crític que no és un extrem relatiu és un punt d'inflexió.

Cal precisar que no tots els punts d'inflexió son punts crítics, és a dir, la recta tangent a la funció per un punt d'inflexió no sempre és horitzontal. A un punt d'inflexió no cal que s'anulli la derivada primera sinó la segona tal com diu la propietat 5. Per exemple, considerem la funció

$$y = e^{-x^2}.$$

Si fem la primera i la segona derivades obtenim:

$$y' = -2xe^{-x^2}, \quad y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

Com es veu la derivada segona s'anulla per $x = \pm 1/\sqrt{2}$ i efectivament el signe de y'' canvia al voltant d'aquests punts, el que vol dir segons la propietat 4 que la concavitat de la funció ha canviat. En canvi per $x = \pm 1/\sqrt{2}$ la derivada primera no s'anulla (la recta tangent no és horitzontal).

Normalment, les propietats anteriors són suficients per trobar extrems locals, punts d'inflexió i els intervals de creixement i concavitat d'una funció. Ara bé, si en un punt resulta que les derivades primera i segona s'anul·len a la vegada, les propietats de 1 a 5 ja no ens serveixen de res. Això és degut a que aquestes propietats són casos particulars de propietats més generals que es dedueixen mitjançant el polinomi de Taylor de la funció. A continuació estudiarem d'on surten les propietats anteriors i enunciem una versió general d'aquestes que ens serveixi fins i tot si s'anul·len les primeres derivades de la funció.

Mitjançant el polinomi de Taylor podem estudiar localment una funció com si es tractés en realitat d'un cert polinomi. Per tant, convé primer conèixer quin és el comportament de les funcions polinòmiques elementals per poder després estudiar la funció.

Com a primer exemple senzill considerem les paràboles $y = x^2$ i $y = -x^2$. La primera és còncava cap a dalt i la segona ho és cap a baix. La primera té un mínim a l'origen i la segona en té un màxim. Si desplaçem l'extrem d'aquestes paràboles fins a un punt qualsevol $x = a$, o bé si les multipliquem per una constant $\alpha > 0$, les seves propietats no s'alteren. Finalment, si en comptes d'una funció de grau 2 considerem una funció de potència n parella també es continuen mantenint les propietats. Així doncs, per a $\alpha > 0$ i n parell la funció $y = \alpha(x - a)^n$ té un mínim en $x = a$ i és còncava cap a dalt, mentres que $y = -\alpha(x - a)^n$ té un màxim en $x = a$ i és còncava cap a baix.

D'altra banda, considerem els polinomis $y = x^3$ i $y = -x^3$ que tenen un punt d'inflexió a l'origen. El primer té una gràfica còncava cap a baix per a $x < 0$ i còncava cap a dalt per a $x > 0$, al contrari que el segon. Igual que abans, podem desplaçar aquestes funcions cap a qualsevol punt $x = a$, multiplicar-les per una constant positiva i fins i tot considerar qualsevol potència senar (distinta de la unitat) sense que canviïn aquestes propietats. És a dir, per a $\alpha > 0$ i $n > 1$ senar les funcions $y = \pm\alpha(x - a)^n$ tenen un punt d'inflexió en $x = a$ i quan augmentem la x la seva concavitat canvia en aquest punt de negativa a positiva per al signe $+$ i de positiva a negativa per al signe $-$.

Suposem ara una situació general en la qual $x = a$ és un punt crític de la funció $f(x)$ (és a dir, $f'(a) = 0$), i que la primera derivada no nul·la en aquest punt de $f(x)$ és d'ordre $n > 1$, essent aquesta funció almenys $n + 1$ vegades derivable. Aleshores, com ja sabem,

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + O((x - a)^{n+1}).$$

El signe de la diferència $f(x) - f(a)$ quan la x està molt a prop de a vindrà determinat pel terme dominant del desenvolupament on apareix la derivada n -èssima de f , mentres que la resta de termes $O((x - a)^{n+1})$ seran menyspreables. Si prenem, doncs, un interval prou petit al voltant de a , $I = (a - \epsilon, a + \epsilon)$, amb $\epsilon \ll 1$,

$$f(x) - f(a) \approx \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n, \quad (1)$$

i llavors tenim les següents possibilitats:

- **n parell.**

Aleshores $(x - a)^n > 0$ per a tot $x \in I - \{a\}$. Tenint en compte la fórmula (1), si

$$f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow f(x) - f(a) > 0, \quad \forall x \in I - \{a\},$$

i això implica que $x = a$ és un mínim relatiu estricte de $f(x)$. D'altra banda si

$$f^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow f(x) - f(a) < 0, \quad \forall x \in I - \{a\},$$

i això implica que $x = a$ és un màxim relatiu estricte de $f(x)$.

Podem veure que $n = 2$ és un cas particular on retrobem les condicions habituals de màxim i mínim relatiu estrictes basades en el signe de la derivada segona de la funció (veure la propietat 3).

- **n senar.**

Donat $x \in I$ tenim que si $x < a$ llavors $(x - a)^n < 0$, i en canvi si $x > a$ llavors $(x - a)^n > 0$. Tenint en compte de nou la fórmula (1) deduïm que si $f^{(n)}(a) > 0$ llavors $f(x) - f(a) > 0$ per $x > a$ i $f(x) - f(a) < 0$ per $x < a$. La funció és creixent en $x = a$ i per tant no es tracta d'un extrem local, sinó d'un punt d'inflexió. D'altra banda, si $f^{(n)}(a) < 0$ llavors $f(x) - f(a) > 0$ per $x < a$ i $f(x) - f(a) < 0$ per $x > a$. En aquest cas la funció és decreixent en $x = a$, i igualment arribem a la conclusió de que aquest punt no és un extrem local, sino un punt d'inflexió.

Com $x = a$ és un punt d'inflexió aleshores es produeix un canvi en el tipus de concavitat de $f(x)$ en aquest punt. Aquest canvi també queda determinat per la fórmula (1). Tenint en compte el que hem explicat abans sobre el comportament de les funcions polinòmiques, si $f^{(n)}(a) > 0$ la funció és còncava cap a baix per $x < a$ i còncava cap a dalt per $x > a$. El contrari passa quan $f^{(n)}(a) < 0$.

Finalment, notem que com n és senar i $n > 1$ llavors $n \geq 3$ i això vol dir que $f''(a) = 0$. Retrobem, doncs, la condició que compleix tot punt d'inflexió.

9.2.1 Exemple

Es vol determinar el comportament de la funció $f(x) = 2x^3 \ln(1 + x)$ al voltant de l'origen.

Fent servir la sèrie de Taylor al voltant de $x = 0$ tenim que per $|x| < 1$

$$\ln(1 + x) = x + O(x^2) \Rightarrow f(x) = 2x^3 \ln(1 + x) = 2x^4 + O(x^5).$$

D'acord amb la teoria que acabem d'exposar podem concloure que $f'(0) = 0$ ja que el terme en x de la sèrie de Taylor de $f(x)$ és nul. Per tant, $x = 0$ és un punt crític de la funció. Com la primera potència no nul·la és parella i el coeficient és positiu, es dedueix que $x = 0$ és un extrem local, concretament un mínim, i que $f(x)$ és còncava cap a dalt al voltant de l'origen.

9.2.2 Exemple

Es vol analitzar el comportament de la funció

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2 + 2x + x^2}}$$

al voltant del punt $x = -1$.

Podem utilitzar la sèrie de Taylor ja que

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2+2x+x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1+(x+1)^2}}.$$

Lavors fem el canvi de variable $y = x + 1$ i calculem la sèrie binomial al voltant de l'origen:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+(x+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1+y^2}} = 1 - \frac{1}{3}y^2 + O(y^4),$$

i desfent el canvi obtenim el resultat següent:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2+2x+x^2}} = 1 - \frac{1}{3}(x+1)^2 + O([x+1]^4).$$

Com la sèrie binomial és vàlida per a $|y| < 1$, aleshores la igualtat anterior serà vàlida per a $|x+1| < 1$, o el que és igual, per a $-2 < x < 0$. És fàcil veure que el resultat obtingut correspon a la sèrie de Taylor de $f(x)$ al voltant de $x = -1$ i per tant es pot utilitzar per estudiar el comportament de la funció al voltant d'aquest punt.

Per començar es comprova que $f(-1) = 1$ tal com indica el terme de grau zero de la sèrie. Després, el terme de grau 1 és nul i això implica que $f'(-1) = 0$ i per tant que $x = -1$ és un punt crític de f . Finalment, el següent terme no nul de la sèrie és de grau parell i té un coeficient negatiu, això implica que $x = -1$ és un extrem local, concretament un màxim, i que la funció és còncava cap a baix al voltant d'aquest punt.

9.2.3 Exemple

En aquest cas estudiarem el comportament al voltant de l'origen de la funció

$$f(x) = \int_0^x \sin^2(x) \, dx.$$

La sèrie de Taylor de $\sin x$ és vàlida per a tot nombre real. Si la multipliquem per sí mateixa ho continua essent, i si la integrem també. Per tant trobem la sèrie de Taylor al voltant de l'origen de $f(x)$.

$$\sin x = x + O(x^3) \Rightarrow \sin^2(x) = [x + O(x^3)]^2 = x^2 + O(x^4),$$

$$f(x) = \int_0^x \{x^2 + O(x^4)\} \, dx = \frac{x^3}{3} + O(x^5).$$

Veiem que el primer terme no nul és de grau senar i més gran que 1, per tant $f'(0) = 0$ i tenim un punt crític a $x = 0$. La potència senar ens indica que es tracta d'un punt d'inflexió. Com el coeficient és positiu, la funció al voltant de l'origen passa de ser còncava cap a baix per a $x < 0$ a ser còncava cap a dalt per a $x > 0$.

10 Zeros de funcions: Mètode de Newton

S'anomenen zeros d'una funció $f(x)$ a les solucions de l'equació $f(x) = 0$. Quan $f(x)$ és un polinomi de grau 1 (és a dir, una recta sobre el pla) la solució de l'equació és trivial. Quan es tracta de un polinomi de grau 2, 3 o 4 existeixen fórmules per trobar els zeros. Ara bé, no existeix una fórmula per a polinomis de grau arbitrari ni molt menys per a funcions arbitràries que no siguin polinomis. La solució de l'equació $f(x) = 0$ en general no es pot trobar mitjançant mètodes algebraics (aïllant la incògnita x) i per tant es requereixen mètodes numèrics aproximats.

En aquesta secció explicarem un dels mètodes més senzills per trobar les solucions d'una equació no lineal del tipus $f(x) = 0$. Aquest mètode és conegut amb el nom de mètode de Newton (o de Newton-Raphson en alguns llibres). En primer lloc, cal recordar un dels teoremes més elementals de l'anàlisi de funcions d'una variable que ens permet conèixer quan existeixen solucions al problema que hem plantejat, l'anomenat teorema de Bolzano.

- **Teorema 2 (de Bolzano):** Sigui $f(x)$ una funció contínua a l'interval $[a, b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, és a dir, $f(x)$ canvia el seu signe als extrems de l'interval. Aleshores existeix $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

A més a més de suposar que $f(x)$ és contínua tal com diu el teorema anterior, suposarem d'ara endavant que $f(x)$ és dues vegades derivable i que les seves derivades primera i segona són contínues dintre d'un interval (a, b) en el qual tenim acotat el valor de c solució de $f(x) = 0$. Llavors, si prenem un $x_0 \in (a, b)$ prou pròxim a c i fem el desenvolupament de Taylor de $f(x)$ al voltant de x_0 obtenim:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + O(|x - x_0|^2).$$

La funció $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ defineix la recta tangent a $f(x)$ que passa pel punt d'abscissa $x = x_0$. Si aproximem el valor de $f(x)$ per aquesta recta tangent aleshores l'equació $f(x) = 0$ es transforma en una equació lineal:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0,$$

que equival a trobar el punt de tall de la recta tangent amb l'eix d'abscisses. Aquest punt ens dona una primera aproximació de la solució que busquem. Per tant, aïllant x trobem

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Amb el valor de x que hem trobat podem tornar a repetir el procediment anterior, i això dona lloc al procediment iteratiu següent:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = g(x_i), \quad i \geq 0, \quad (2)$$

conegut com a mètode de Newton. Si la successió de nombres reals $\{x_i\}_{i \geq 0}$ és convergent i x^* és el seu límit aleshores és fàcil comprovar que aquest límit té les propietats següents:

- És un punt fix de la funció $g(x)$, és a dir, $x^* = g(x^*)$.
- És un zero de la funció $f(x)$, és a dir, $f(x^*) = 0$.

Ara bé, la successió generada pel mètode de Newton no ha de ser necessàriament convergent sempre. Això dependrà de l'equació concreta que estem resolent, és a dir, de l'expressió de la funció $f(x)$, i a més a més del valor inicial amb el que comencem a aplicar la fórmula (2). El teorema següent descriu unes condicions suficients per poder resoldre l'equació $f(x) = 0$ mitjançant el mètode de Newton.

- **Teorema 3:** Sigui $f(x)$ una funció contínua i dues vegades derivable amb derivades contínues en un interval $[a, b]$. Si es compleixen les condicions següents:

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$,
2. $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$,
3. $f''(x) \geq 0$ ó $f''(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$,
4. El mínim de $f'(x)$ a l'interval $[a, b]$ s'assoleix a $\bar{x}$, essent aquest punt un dels extrems de l'interval, $\bar{x} = a$ ó $\bar{x} = b$, i per a aquest punt es compleix que

$$\left| \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \right| \leq b - a,$$

aleshores el mètode de Newton serà convergent cap a una única solució c de l'equació $f(x) = 0$ per a qualsevol valor inicial $x_0 \in [a, b]$.

No donarem la demostració d'aquest teorema. Tanmateix, no és gaire complicat interpretar les condicions que el teorema anterior exigeix a la funció $f(x)$ perquè es pugui aplicar amb èxit el mètode de Newton. La condició 1 és el teorema de Bolzano que ja hem comentat abans. La condició 2 representa que la funció $f(x)$ no té ni extrems ni punts d'inflexió a l'interval $[a, b]$, això garanteix que sempre és o bé creixent o bé decreixent a tot l'interval, i per tant que l'equació $f(x) = 0$ té solució única. La condició 3 equival a dir que la funció $f(x)$ manté sempre el mateix tipus de concavitat (sempre cóncava o sempre convexa) a tot l'interval $[a, b]$. Finalment, la condició 4 s'ha d'interpretar geomètricament. D'una banda, la derivada de $f(x)$ és mínima a un dels extrems de l'interval i per tant que en aquest punt és mínim el pendent de la recta tangent a $f(x)$. D'altra banda, la desigualtat estableix que aquesta recta tangent de pendent mínim talla l'eix x en un punt de l'interior de l'interval $[a, b]$. Aquesta darrera condició ens assegura que la successió de nombres generada pel mètode de Newton

sempre es manté dintre de l'interval $[a, b]$ (on es verifiquen les hipòtesis del teorema) si el valor inicial està dins d'aquest interval.

A l'exemple següent aplicarem aquest teorema. És útil quan, per exemple, es vol implementar un mètode per calcular arrels n -èssimes (vegeu la llista de problemes) amb la seguretat de que funcionarà sempre. Però tot sovint, quan es tracta de resoldre una equació concreta, les hipòtesis són massa complicades de comprovar. Aleshores es procedeix de la manera següent: donem valors a la x fins que localitzem un canvi de signe de la funció (o, si es pot, es dibuixa la gràfica). Segons el teorema de Bolzano, allà hi ha un zero de la funció. Escollim un punt de l'interval com a punt inicial i engeguem el mètode de Newton, sense comprovar cap condició. Si el mètode convergeix, ja tenim la solució. Si no ho fa, o si convergeix a una solució que no és la que volem, escollim un altre punt inicial i repetim el procés. Si realment existeix una solució, aquest procediment funciona quasi sempre.

10.1 Exemple

Anem a trobar la solució positiva més petita de l'equació $\cos x = x$. Geomètricament, la solució serà el punt més a prop de l'origen a la part positiva de l'eix x on es tallen la recta $y = x$ i la funció $y = \cos x$.

Per resoldre aquest problema hem de trobar el zero més petit positiu de la funció $f(x) = x - \cos x$. Veiem que $f(0) = -1$ i $f(\pi/2) = \pi/2 > 0$, llavors pel teorema de Bolzano $f(x)$ té al menys un zero dintre de l'interval $[0, \pi/2]$ i es compleix la primera condició del teorema 3. Comprovem la resta de condicions, per començar $f'(x) = 1 + \sin x = 0$ té la solució positiva mínima a $x = \pi$, per tant $f'(x) \neq 0$ a l'interval $[0, \pi/2]$ i per tant només hi haurà una solució en aquest interval. D'altra banda, com $\sin x$ és creixent per a $0 \leq x \leq \pi/2$, el mínim de $f'(x)$ s'assoleix al l'extrem inferior d'aquest interval, $x = 0$, on $f'(0) = 1$ i el quocient

$$\left| \frac{f(0)}{f'(0)} \right| = 1 < \frac{\pi}{2}.$$

Per tant hem comprovat que es compleix la condició 4 del teorema 3. Només ens queda veure la condició 3 que és gairebé immediata car $f''(x) = \cos x$ que manté clarament el seu signe a l'interval $[0, \pi/2]$. Aleshores podem aplicar el mètode de Newton per a qualsevol valor inicial dintre d'aquest interval on sabem que només hi ha una solució, que per tant serà la solució positiva més petita que busquem.

Primer construïm la fórmula iterativa,

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{x_i - \cos(x_i)}{1 + \sin(x_i)},$$

i agafem com a valor inicial $x_0 = 1$ (el més senzill doncs podem triar qualsevol). A continuació calculem la següent successió de nombres fent servir una calculadora de 10

dígits:

$$\begin{aligned}x_0 &= 1 \\x_1 &= 0.750363868 \\x_2 &= 0.739112891 \\x_3 &= 0.739085133 \\x_4 &= x_3\end{aligned}$$

Els valors es repeteixen a partir de $i = 4$ i això vol dir que dintre de la precisió de la màquina hem trobat la solució, que en aquest cas serà $c = 0.739085133 \pm 10^{-9}$.

10.2 Velocitat de convergència i precisió

El terme “velocitat de convergència” s'utilitza per designar lo ràpid que un mètode iteratiu com el de Newton convergeix cap a la solució final. No farem una teoria detallada sobre aquesta qüestió, però exposarem alguns resultats que és útil coneixer quan es fa servir el mètode de Newton.

Hem vist al començament que per trobar la fórmula d'aquest mètode aproximàvem la funció $f(x)$ per la seva recta tangent. En fer això es comet un error de l'ordre de $|x - x_0|^2$. Aquest és l'error quan evaluem $f(x)$ fent servir la recta tangent, però es pot demostrar que l'error al valor de x és també del mateix ordre. Per tant es dedueix que l'error entre dos termes consecutius de la successió de nombres generada amb el mètode de Newton és $O(|x_{i+1} - x_i|^2)$, quan estem a prop de la solució. La terminologia habitual per descriure aquesta propietat és dir que la convergència del mètode de Newton és quadràtica. Això es tradueix en el fet que, típicament, els successius valors x_i dupliquen el nombre de xifres correctes amb cada iteració.

Com a conseqüència de la convergència quadràtica del mètode de Newton, podem predir quantes iteracions ens calen aproximadament per obtenir una precisió determinada. Les primeres iteracions poden convergir a poc a poc, depenent del punt inicial, però quan dues iteracions repeteixen el primer decimal, les següents, en repetiran aproximadament 2, 4, 8, 16, 32...

També cal tenir en compte que quan hi ha zeros dobles (equacions del tipus $x^2 = 0$, en les que la corba és tangent a l'eix d'abscisses), el mètode de Newton no és quadràtic, sinó lineal, i funciona a poc a poc i malament (perd la meitat de les xifres amb les que calcula la màquina). L'estudi d'aquests cassos especials i la manera d'enfocar-los es porta a terme en els cursos de Càlcul Numèric.

Evidenment no sempre cal assolir la màxima precisió que ens proporciona la màquina. A vegades tenim prou amb una precisió inferior i aleshores és convenient establir una condició per aturar els càlculs quan aquesta precisió s'assoleix. La manera habitual de fer això és tenir en compte que a la fórmula de Newton, quan calculem un nou valor x_{i+1} fem servir el valor anterior x_i al qual l'hi restem una certa quantitat que es pot considerar com una certa correcció que efectuem per millorar la solució

obtinguda al pas i . Llavors, si aquesta correcció és petita el nou valor x_{i+1} no serà gaire diferent de x_i . Així doncs, si volem una solució amb una precisió ϵ donada, el que farem és aturar el mètode quan es compleixi la condició

$$\left| \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \right| < \epsilon.$$

11 Extrems absoluts

El terme *extrem relatiu* o *local* fa referència al fet que el màxim o el mínim té un caràcter essencialment local, relatiu al seu entorn més pròxim. Un punt serà màxim (o mínim) local si es pot trobar un cert interval al seu voltant on el valor de la funció en aquest punt sigui més gran (o més petit) que a la resta de punts de l'interval. Per contra, el terme *extrem absolut* fa referència al valor màxim o mínim que pot pendre una funció en un cert subconjunt del seu domini. No sempre un extrem absolut coincideix amb un extrem relatiu.

Per exemple, els extrems absoluts de la funció $y = x^2$ en l'interval $[1, 2]$ coincideixen amb els punts que limiten aquest interval. Ja que la funció assoleix el seu valor mínim en aquest interval per a $x = 1$ i el seu valor màxim per a $x = 2$. Cap d'aquests punts és un extrem relatiu de $y = x^2$, que té un mínim local com ja sabem a $x = 0$.

Recordem que un dels teoremes fonamentals sobre continuïtat de funcions ens permet garantir l'existència d'extrems absoluts en certes situacions.

- **Teorema 4:** Si la funció $f(x)$ és contínua en un interval tancat $[a, b]$ aleshores existeixen $x_1, x_2 \in [a, b]$ tals que

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x_2) \leq f(x) \leq f(x_1).$$

Els punts x_1 i x_2 s'anomenen màxim i mínim absolut, respectivament, de la funció $f(x)$ a l'interval $[a, b]$. De manera que

$$\max_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_1), \quad \min_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_2),$$

és a dir, $f(x_1)$ és el màxim valor de la funció a l'interval $[a, b]$ i $f(x_2)$ és el mínim valor en aquest mateix interval. Cal fer notar que els extrems absoluts no són necessàriament únics. Per exemple, a l'interval $[-1, 1]$ la funció $y = x^2$ té dos màxims absoluts a $x = \pm 1$.

El teorema següent permet establir un mètode per determinar els extrems absoluts d'una funció en un interval tancat.

- **Teorema 5:** Sigui $x_0 \in [a, b]$ un extrem absolut d'una funció $f(x)$ contínua en aquest interval. Si $x_0 \in (a, b)$ aleshores x_0 és un extrem local de $f(x)$.

Com a conseqüència del teorema 5 és evident que els extrems absoluts només poden ser o bé punts de la frontera de l'interval o bé, si són punts de l'interior de l'interval, hauran de ser extrems locals. Per tant, donada una funció contínua $f(x)$ en un interval $[a, b]$, si volem trobar els extrems absoluts seguirem el mètode següent:

1. Busquem els extrems locals de $f(x)$ que pertanyin a l'interval obert (a, b) . Si no existeixen, llavors els extrems absoluts es troben als punts $x = a$ i $x = b$.
2. Si hem trobat extrems locals a l'apartat anterior, llavors evaluem la funció als punts que limiten l'interval, $\{a, b\}$, i als extrems locals. Comparant els valors de la funció obtinguts es dedueixen els extrems absoluts.

11.1 Exemple

Anem a determinar els valors màxim i mínim del polinomi $p(x) = x^3 - 3x + 3$ a l'interval $[-3, 3/2]$.

Primer trobem els extrems locals. Per determinar els punts crítics iguaem la derivada primera a zero,

$$p'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Les dues solucions pertanyen a l'interval $[-3, 3/2]$. Si fem la derivada segona obtenim $p''(x) = 6x$, i per tant, $p''(1) = 6$, $p''(-1) = -6$. Llavors $x = 1$ és un mínim local amb $p(1) = 1$, i $x = -1$ és un màxim local amb $p(-1) = 5$. En principi, ambdós punts són candidats a extrems absoluts.

A continuació, calculem els valors del polinomi als límits de l'interval i obtenim: $p(-3) = -15$ i $p(3/2) = 15/8$. Finalment, comparant amb els resultats anteriors es dedueix que el màxim absolut es troba al punt $x = -1$ (un màxim local a l'interior de l'interval), on el polinomi val 5, mentres que el mínim absolut es troba al punt $x = -3$ (límit inferior de l'interval) on el polinomi val -15 .

12 Asímptotes i límits cap a infinit

En aquesta secció explicarem com es pot estudiar mitjançant desenvolupaments en sèrie de Taylor el comportament d'una funció quan x tendeix a $+\infty$ ó $-\infty$ (abreujadament, comportament asimptòtic d'una funció). Bàsicament, el comportament asimptòtic d'una funció, $f(x)$, pot ser de dos tipus:

1. La funció creix (o decreix) indefinidament cap a $+\infty$ (ó $-\infty$),

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty,$$

és a dir, es verifica alguna de les possibles combinacions de signes del límit anterior. (D'ara en endavant els límits on aparegui $x \rightarrow \pm\infty$ indiquen els dos límits cap a infinit positiu i negatiu.)

2. La funció s'aproxima indefinidament cap a un valor constant c .

En el cas 1, a vegades és possible trobar una funció $y = a(x) \neq f(x)$, que s'anomena asímptota i tal que la diferència entre la funció i l'asímtota tendeix cap a zero quan x tendeix cap a $+\infty$ ó cap a $-\infty$. Normalment interessa que la funció $a(x)$ sigui un polinomi. En el cas 2, és diu que $f(x)$ té una asímptota amb equació $y = c$, que de fet és un polinomi de grau zero.

- **Definició 1:** Siguin dues funcions diferents $f(x)$ i $a(x)$, on $a(x)$ pot ser una constant (igual o diferent de zero), o bé una combinació lineal finita de potències positives no necessàriament enteres de x (en particular un polinomi de grau més gran que zero). Si es verifica almenys una de les igualtats següents:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - a(x)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - a(x)] = 0,$$

es diu que la corba $y = a(x)$ és una asímptota (no vertical) de $f(x)$.

- **Definició 2:** Es diu que la recta $x = c$ (on c és un nombre real fixat) és una asímptota vertical de la funció $f(x)$ si i només si es compleix almenys una de les igualtats següents:

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty.$$

On $\pm\infty$ representa que els límits tant poden ser infinits amb un signe o l'altre.

Normalment les asímptotes verticals són fàcils de trobar car corresponen a punts que no pertanyen al domini de la funció com es pot veure a partir de la definició 2. No ens ocuparem d'aquest tipus d'asímtotes sino més aviat de la resta, a les que fa referència la definició 1, i que estan directament relacionades amb l'anomenat comportament asimptòtic de la funció.

La idea del mètode que descriurem a continuació per analitzar el comportament asimptòtic de funcions és molt similar a la que hem fet servir a la secció 9.1 per resoldre límits en un punt. Per això cal primer introduir el concepte de desenvolupament en l'infinít d'una funció.

- **Definició 3:** Anomenem *desenvolupament en l'infinít* de la funció $f(x)$ a una expressió del tipus:

$$f(x) = a(x) + g(1/x),$$

on $a(x)$ és una asímptota de $f(x)$, i $g(1/x)$ és una suma infinita de potències positives (no necessàriament enteres) de $1/x$.

Per a les aplicacions en les que farem servir desenvolupaments en l'infinit no ens interessarà calcular l'expressió exacta del terme general de la suma infinita $g(1/x)$. Tindrem prou amb conèixer de quin ordre és aquesta suma, és a dir, el valor mínim de l'exponent $k > 0$ tal que

$$f(x) = a(x) + O(1/x^k). \quad (3)$$

Aquesta igualtat es pot escriure, fent servir límits de funcions, de la manera següent:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x) - a(x)}{1/x^k} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{O(1/x^k)}{1/x^k} = \ell \neq 0,$$

on ℓ és un nombre real. Finalment, s'ha de tenir en compte que la suma infinita $g(1/x)$ no és pas una serie de potències convencional ni cap desenvolupament de Taylor (ni tan sols apareixen potències positives de x ó $x - a$).

12.1 Càlcul de desenvolupaments en l'infinit

L'estratègia general per obtenir un desenvolupament en l'infinit d'una funció $f(x)$ consisteix en fer un canvi de variables de manera que quan x tendeixi cap a infinit la nova variable tendeixi cap a zero. Aleshores es fa un desenvolupament de Taylor al voltant de l'origen respecte a la nova variable.

Per poder aplicar aquest mètode cal que es verifiqui la següent condició:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \neq \pm\infty. \quad (4)$$

En cas contrari, cal separar la funció $f(x)$ en un producte de dues funcions on un dels factors verifiqui la condició (4). Normalment, es tracta d'obtenir una expressió de la forma $f(x) = x^n h(x)$ tal que la funció $h(x)$ compleix la condició (4).

Considerem ara una funció $f(x)$ que compleix la condició (4). Si fem un canvi de variable $t = g(x)$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0,$$

la funció $f(x)$ queda transformada en una funció depenent de la variable t , $F(t)$. El desenvolupament en sèrie de Taylor de $F(t)$ al voltant de $t = 0$ correspon a prendre $x \rightarrow \pm\infty$ a $f(x)$. Quan desfem el canvi de variable a la sèrie de Taylor al voltant de l'origen de $F(t)$, el resultat és una suma infinita de potències de x que coincideix amb $f(x)$ quan x tendeix cap a $\pm\infty$.

Resumint, per poder fer un desenvolupament en l'infinit calen dos requisits:

1. El límit cap a infinit de la funció no pot ser infinit:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \neq \pm\infty.$$

2. El canvi de variable $t = g(x)$ ha de verificar la condició:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0.$$

Exemple 1: Trobar els primers termes del desenvolupament en l'infinit de la funció $f(x) = xe^{1/x}$.

Veiem que $f(x)$ és el producte de dues funcions: $y = x$ i $y = e^{1/x}$, on $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{1/x} = 1$. Podem fer el canvi $t = 1/x$, ja que $t \rightarrow 0$ quan $x \rightarrow \pm\infty$. Després de fer el canvi de variable desenvolupem l'exponencial en sèrie de Taylor al voltant de $t = 0$ i a continuació desfarem el canvi de variable:

$$e^{1/x} = e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + O(t^3) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Ara només resta multiplicar per x per obtenir el desenvolupament en l'infinit de $f(x)$,

$$f(x) = xe^{1/x} = x + 1 + \frac{1}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) = x + 1 + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exemple 2: Trobar els primers termes del desenvolupament en l'infinit de la funció $f(x) = \sqrt[3]{1+x+x^2}$.

La funció tendeix cap a infinit quan la x és fa infinitament gran. Per tant no podem fer el seu desenvolupament directament. Primer factoritzem $f(x)$ de la següent manera:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = x^{2/3} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{1/3}.$$

on es veu fàcilment que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{1/3} = 1,$$

i llavors ja podem fer el desenvolupament aplicant el canvi $t = 1/x + 1/x^2$ on es veu que quan $x \rightarrow \pm\infty$ la t tendeix a zero.

$$\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{1+t} = 1 + \frac{t}{3} + O(t^2).$$

Com que $t^2 = O(1/x^2)$, quan multipliquem per $x^{2/3}$ per obtenir el desenvolupament final quedaran especificats tots els termes fins a $x^{2/3}O(1/x^2) = O(1/x^{4/3})$. Desfent el canvi de variable s'obté:

$$\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x^2} + O(1/x^2) = 1 + \frac{1}{3x} + O(1/x^2).$$

En la darrera igualtat hem agrupat totes les potències de $1/x$ amb exponent més gran o igual que dos dintre del terme $O(1/x^2)$.

Finalment multipliquem per $x^{2/3}$ per obtenir el desenvolupament en l'infinit de $f(x)$,

$$f(x) = x^{2/3} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{1/3} = x^{2/3} + \frac{1}{3x^{1/3}} + O(1/x^{4/3}) = x^{2/3} + O(1/x^{1/3}).$$

12.2 Aplicació al càlcul d'asímtotes no verticals

Els desenvolupaments en l'infinit es poden fer servir per trobar asímtotes de funcions. Tenint en compte les definicions 1 i 3 i la fórmula (3) es dedueix que:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - a(x)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} O(1/x^k) = 0, \quad (5)$$

és a dir, la funció $a(x)$ verifica la definició d'asímtota de $f(x)$.

A l'exemple de la secció 12.1 hem vist que la funció $xe^{1/x}$ té el desenvolupament següent en l'infinit:

$$xe^{1/x} = x + 1 + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

i això implica que la recta $y = x + 1$ és una asímtota (anomenada oblíqua) d'aquesta funció.

Les asímtotes horitzontals i les oblíquies són de fet dos casos particulars d'asímtotes que corresponen, respectivament, a una recta horitzontal, $a(x) = c$, i a una recta de pendent no nul i finit, $a(x) = cx + d$. Efectivament, si substituïm $a(x) = c$ en la fórmula (5) s'obté

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - c] = 0,$$

i això implica que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = c,$$

és a dir, l'expressió que habitualment es fa servir per establir que la recta $y = c$ és una asímtota de $f(x)$.

D'altra banda, si substituïm $a(x) = cx + d$ en la fórmula (5) llavors

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - cx - d] = 0.$$

Aïllant la d obtenim

$$d = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - cx],$$

i tenint en compte que

$$0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x) - cx - d}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - c - \frac{d}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} - c,$$

es dedueix que

$$c = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Aquestes expressions de c i d són les que habitualment es fan servir per calcular el pendent i l'ordenada a l'origen d'una asímtota oblíqua.

12.2.1 Exemple

Es volen trobar les asímptotes de la funció $f(x) = \frac{x}{1-x}$.

És evident que hi ha una asímptota vertical a $x = 1$. Per trobar les asímptotes no verticals farem servir el desenvolupament en l'infinit de la funció. Primer dividim per x el numerador i el denominador

$$f(x) = \frac{1}{1/x - 1} = -\frac{1}{1 - 1/x}.$$

Veiem que el límit de $f(x)$ no és infinit quan $x \rightarrow \pm\infty$, així doncs fem el canvi $t = 1/x$ i desenvolupem al voltant de $t = 0$,

$$-\frac{1}{1-t} = -\left[1 + t + O(t^2)\right] = -1 - \frac{1}{x} + O(1/x^2) = -\frac{1}{1 - 1/x},$$

i llavors

$$f(x) = \frac{x}{1-x} = -1 - \frac{1}{x} + O(1/x^2),$$

amb el que es veu clarament que $y = -1$ és una asímptota horitzontal de $f(x)$ quan $x \rightarrow \pm\infty$. D'altra banda, si fem la diferència entre la funció i la seva asímptota obtenim que:

$$\frac{x}{1-x} + 1 = -\frac{1}{x} + O(1/x^2).$$

Per tant, quan $x \rightarrow \pm\infty$ la diferència està dominada pel terme $-1/x$ i això implica que quan $x \rightarrow +\infty$ la diferència és negativa, i llavors la funció s'aproxima a la asímptota per sota. En canvi, quan $x \rightarrow -\infty$ la diferència serà positiva i llavors la funció s'aproximarà a la seva asímptota per dalt.

12.2.2 Exemple

Es volen trobar les asímptotes de la funció $f(x) = \sqrt[3]{x^9 + x^7} - \sqrt[3]{x^9 + 6x^6}$.

Quan fem el límit de la funció cap a infinit obtenim una indeterminació del tipus $+\infty - \infty$. Per fer el desenvolupament en l'infinit d'aquesta funció hem de tenir en compte que aquests desenvolupaments es poden sumar, restar i multiplicar per un escalar tal com passa amb les sèries de potències ordinàries. Així doncs, farem el desenvolupament de cada arrel cúbica per separat i després sumarem el resultat. Primer cal, però, factoritzar correctament la funció per poder dur a terme el desenvolupament.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^9(1 + 1/x^2)} - \sqrt[3]{x^9(1 + 6/x^3)} = x^3 \left(\sqrt[3]{1 + 1/x^2} - \sqrt[3]{1 + 6/x^3} \right).$$

A la primera arrel cúbica fem el canvi $t = 1/x^2$ i obtenim:

$$\sqrt[3]{1+t} = 1 + \frac{t}{3} - \frac{t^2}{9} + O(t^3) = 1 + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{9x^4} + O(1/x^6) = \sqrt[3]{1 + 1/x^2}.$$

Si a la segona arrel cúbica fem el canvi $t = 6/x^3$ obtenim de nou $\sqrt[3]{1+t}$. Només cal, doncs, substituir $t = 6/x^3$ en l'expressió anterior

$$\sqrt[3]{1+6/x^3} = 1 + \frac{6}{3x^3} + O(1/x^6) = 1 + \frac{2}{x^3} + O(1/x^6).$$

Finalment, restem els desenvolupaments obtinguts i multipliquem per x^3

$$f(x) = x^3 \left[\frac{1}{3x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{9x^4} + O(1/x^6) \right] = \frac{1}{3}x - 2 - \frac{1}{9x} + O(1/x^3).$$

La recta $y = -2 + (x/3)$ és una asímptota oblíqua de la funció, i a partir del terme $-1/(9x)$ es pot deduir com s'aproxima la funció a la seva asímptota tal com hem vist a l'exemple anterior.

12.3 Càlcul de límits cap a infinit

A partir de la definició 3 i fent servir la fórmula (3) es dedueix que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [a(x) + O(1/x^k)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a(x),$$

on cal recordar que $a(x)$ és una certa suma finita de potències de x i per tant el càlcul del darrer límit sempre és immediat. De fet, el límit serà infinit (positiu o negatiu) si $a(x)$ és igual a un polinomi de grau més gran que zero o bé si conté una potència de x més gran que zero. En canvi, el límit tindrà un valor constant si $f(x)$ té una asímptota horitzontal. Com hem vist a la secció anterior, la funció $a(x)$ és de fet una asímptota de $f(x)$. Per tant és evident que el càlcul de límits cap a infinit està directament relacionat amb el càlcul d'asímptotes.

12.3.1 Exemple

Es vol calcular el límit següent:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}}.$$

D'entrada el límit és indeterminat. Llavors fem el desenvolupament en l'infinit del denominador tenint en compte les consideracions fetes a l'exemple 12.2.2 sobre operacions entre desenvolupaments

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1} &= x \left(\sqrt{1 + 1/x} - \sqrt{1 + 1/x^2} \right) = \\ &= x \left[1 + \frac{1}{2x} + O(1/x^2) - \left(1 + \frac{1}{2x^2} + O(1/x^4) \right) \right] = \frac{1}{2} + O(1/x). \end{aligned}$$

Per tant obtenim que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{2},$$

i això implica que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}} = 2.$$

12.3.2 Exemple

Calculeu els límits següents:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1/x)}{\ln(1 + 1/x)}, \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin(1/x) - 1}{x \ln(1 + 1/x) - 1}.$$

Aquests exemples es poden resoldre mitjançant la regla de l'Hôpital però és interessant fer-los utilitzant desenvolupaments en l'infinit per veure la relació entre aquest mètode i el més conegut de l'Hôpital.

a) Tenim una indeterminació $0/0$. Desenvolupem en l'infinit el numerador i el denominador per separat fent en ambdós casos el canvi $t = 1/x$.

$$\sin(t) = t + \frac{t^3}{6} + O(t^5) = \frac{1}{x} + O(1/x^3) = \sin(1/x),$$

$$\ln(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + O(t^3) = \frac{1}{x} + O(1/x^2) = \ln(1 + 1/x).$$

Veiem doncs que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1/x)}{\ln(1 + 1/x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x + O(1/x^3)}{1/x + O(1/x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1/x} = 1.$$

Després de fer els desenvolupaments comprovem que el terme dominant quan $x \rightarrow +\infty$ és $1/x$ tant al numerador com al denominador. Per tant el límit del quocient serà igual a 1.

Si apliquem la regla de l'Hôpital, després de fer la derivada primera de les funcions del numerador i del denominador el límit dona 1 partit per 1. Això és el quocient entre els coeficients dels termes $1/x$ dels desenvolupaments en l'infinit de cada funció..

b) Si dividim numerador i denominador per x i prenem desenvolupaments en l'infinit podem aprofitar el que hem fet abans. Llavors s'obté:

$$\sin(1/x) - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + O(1/x^5) - \frac{1}{x} = -\frac{1}{6x^3} + O(1/x^5),$$

$$\ln(1 + 1/x) - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + O(1/x^3) - \frac{1}{x} = -\frac{1}{2x^2} + O(1/x^3).$$

Hem hagut d'agafar un terme més que al cas anterior ja que quan restem $1/x$ el primer terme es cancel·la. Ara si fem el límit tenim que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin(1/x) - 1}{x \ln(1 + 1/x) - 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1/x) - 1/x}{\ln(1 + 1/x) - 1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^{-3}/6 + O(1/x^5)}{-x^{-2}/2 + O(1/x^3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^{-3}/6}{-x^{-2}/2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x} = 0.\end{aligned}$$

En aquest cas, si apliquem l'Hôpital veiem que cal derivar dues vegades abans de resoldre la indeterminació car els coeficients dels termes $1/x$ dels desenvolupaments del numerador i del denominador són nuls. Per tant, després de derivar una vegada encara es manté la indeterminació $0/0$ i això obliga a derivar una segona vegada.

12.4 Estudi d'integrals impròpies de primera espècie

Moltes vegades hem de resoldre un límit cap a infinit quan volem aplicar el criteri de comparació asimptòtica (o al límit) per estudiar la convergència d'integrals impròpies de primera espècie (amb límit d'integració infinit).

En el cas que $a(x) \neq 0$, l'expressió (3) que apareix a la definició 3 es pot escriure de la forma

$$\frac{f(x)}{a(x)} = 1 + \frac{O(1/x^k)}{a(x)},$$

i llavors si fem el límit cap a infinit positiu o negatiu,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{a(x)} = 1 + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{O(1/x^k)}{a(x)} = 1.$$

El resultat anterior és conseqüència de que si $a(x)$ conté una potència de x més gran que zero, aleshores el quocient $O(1/x^k)/a(x)$ sempre tendirà asimptòticament cap a $0/\pm\infty = 0$, i si $a(x)$ és una constant el quocient també tendirà asimptòticament cap a zero. En qualsevol cas, el límit anterior implica que el caràcter convergent o divergent de la integral impròpia de $f(x)$ és el mateix que el de la integral impròpia de $a(x)$. Com $a(x)$ és una combinació lineal finita de potències de x , el caràcter de la integral impròpia es pot determinar de manera immediata. En el cas que $a(x) = 0$, aleshores $f(x) = O(1/x^k)$, o el que és igual

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{1/x^k} = \ell \neq 0.$$

amb la qual cosa el caràcter de la integral impròpia de $f(x)$ és el mateix que el de la integral impròpia de $1/x^k$, i de nou el problema es pot resoldre immediatament.

12.4.1 Exemple

Estudieu la convergència de les integrals impròpies següents:

$$a) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}}, \quad b) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^5+3x^4}-\sqrt{x^5+x^4}}.$$

a) Tal com vam veure a l'exemple 12.3.1

$$\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2} + O(1/x),$$

o dit d'una altra manera, $y = 1/2$ és una asímptota del denominador de la integral, per tant,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1})^{-1}}{2} = 1,$$

i això implica que la integral que estudiem té el mateix caràcter que la integral impròpia

$$\int_2^{+\infty} 2 \, dx,$$

que és clarament divergent.

b) En aquest cas podem fer el desenvolupament en l'infinit del denominador de la integral. Com sempre prenem les arrels per separat i després fem la diferència.

$$\sqrt{x^5+3x^4} = x^{5/2} \sqrt{1+3/x} = x^{5/2} \left[1 + \frac{3}{2x} + O(1/x^2) \right],$$

$$\sqrt{x^5+x^4} = x^{5/2} \sqrt{1+1/x} = x^{5/2} \left[1 + \frac{1}{2x} + O(1/x^2) \right],$$

$$\sqrt{x^5+3x^4} - \sqrt{x^5+x^4} = x^{5/2} \left[\frac{1}{x} + O(1/x^2) \right] = x^{3/2} + O(x^{1/2}).$$

A partir d'aquesta darrera igualtat veiem que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^5+3x^4} - \sqrt{x^5+x^4}}{x^{3/2}} = 1,$$

i això implica que la integral que estem estudiant té el mateix caràcter que la integral impròpia

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}},$$

que és clarament convergent car $3/2 > 1$.