

IV. Sèries de Potències i Desenvolupaments de Taylor

Guillermo González Casado

Setembre del 2000

6 Sèries de potències

6.1 Definició

Sigui una funció real de variable real $f(x)$ definida de la manera següent:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_n \in \mathbf{R}, \quad \forall n.$$

Aquesta expressió de $f(x)$ s'anomena sèrie de potències i els nombres reals a_n són els coeficients de la sèrie.

Si substituïm x per un nombre real l'expressió de $f(x)$ es converteix en una sèrie numèrica. Quan aquesta sèrie és convergent la seva suma ens dona el valor de la funció. Naturalment, per als valors de x per als quals la sèrie numèrica no convergeix la funció no està definida. Aleshores el domini de la funció $f(x)$ és el conjunt de valors de x per als quals la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és convergent, aquest domini s'anomena també domini de convergència de la sèrie de potències.

Exemple: Una sèrie geomètrica de raó x defineix la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (es tracta del cas $a_n = 1, \forall n$). Com ja sabem, aquesta sèrie convergeix quan $|x| < 1$ i per tant el domini de convergència de la sèrie de potències és l'interval $(-1, 1)$. A més a més, sabem que la suma de la sèrie en aquest interval és igual a $1/(1-x)$. És a dir,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Per a qualsevol altre valor de x aquesta igualtat no es verifica, la funció $1/(1-x)$ està definida per qualsevol $x \neq 1$ però la sèrie és divergent fora de l'interval $(-1, 1)$.

Com es pot veure a l'exemple anterior, algunes sèries de potències es poden identificar amb funcions conegudes, tanmateix això no es una propietat general, hi ha sèries de potències que no tenen una expressió tancada. En aquest tema ens ocuparem de vèries qüestions. Veurem com es poden expressar funcions conegudes mitjançant sèries de potències, també estudiarem com es fan servir les sèries de potències per estudiar funcions i definir-ne de noves, encara que aquestes funcions no tinguin una expressió analítica finita o tancada. Donat que les úniques operacions que s'utilitzen en la construcció d'una sèrie de potències son la suma i el producte, és bastant evident que aquestes sèries poden ser de gran utilitat al càlcul, la representació i l'estudi de qualsevol mena de funcions.

6.2 Interval de convergència

La primera cosa que anem a establir és que el domini de convergència d'una sèrie de potències ve donat sempre per un cert interval de la recta real. Després veurem com es calcula aquest interval.

- **Teorema 1:** Si la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és convergent per a $x = x_0 \neq 0$, aleshores és absolutament convergent per a tot $x \in \mathbf{R}$ tal que $|x| < |x_0|$. En canvi, si la sèrie de potències és divergent per $x = y_0 \neq 0$, aleshores és divergent per a tot $x \in \mathbf{R}$ tal que $|x| > |y_0|$.

Aquest teorema proporciona un mètode per determinar els punts on una sèrie de potències és convergent o divergent. Efectivament, si $x_0 \neq 0$ és un punt de convergència de la sèrie, aleshores la sèrie serà absolutament convergent a tot punt de l'interval $(-|x_0|, |x_0|)$. D'altra banda, si la sèrie es divergent a un punt $y_0 \neq 0$ aleshores serà divergent a tots els punts dels intervals $(-\infty, -|y_0|)$ i $(|y_0|, +\infty)$.

Per tant, només hi ha tres possibilitats:

1. La sèrie de potències només convergeix per a $x = 0$.
2. La sèrie de potències convergeix per a tot $x \in \mathbf{R}$.
3. Existeix un nombre real $r > 0$ tal que per a $|x| < r$ la sèrie és absolutament convergent i per a $|x| > r$ la sèrie es divergent. Aquest r s'anomena radi de convergència de la sèrie de potències.

Si la sèrie només convergeix per a $x = 0$ (cas 1), diem que el radi de convergència es zero, en canvi si la sèrie és convergent per a tot $x \in \mathbf{R}$ (cas 2), diem que el radi de convergència és infinit. Per qualsevol sèrie de potències, doncs, l'estructura del seu domini de convergència és pot caracteritzar com un cert interval de la recta real centrat al zero. Si la sèrie té radi de convergència r aleshores l'interval $(-r, r)$ s'anomena interval de convergència de la sèrie. Als extrems de l'interval de convergència $x = \pm r$

la sèrie tan pot ser convergent com no ser-ho, això requereix un estudi individual per a cada cas. Per tant, el càlcul de r ens permet determinar pràcticament tot el domini de convergència tret dels dos extrems de l'interval de convergència.

6.3 Càlcul del radi de convergència

Per calcular el radi de convergència d'una sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ apliquem el criteri del quocient a la sèrie de valors absoluts. Sigui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x| = \ell |x|,$$

on ℓ és el límit del quocient entre els valors absoluts de a_{n+1} i a_n . Aleshores la sèrie és absolutament convergent quan $\ell |x| < 1$, és a dir, per a tot x tal que $|x| < 1/\ell$. En canvi, la sèrie és divergent quan $\ell |x| > 1$, o el que és igual, quan $|x| > 1/\ell$. Per tant, segons el que hem vist a la secció anterior, es dedueix que

$$r = 1/\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

és el radi de convergència i que $(-1/\ell, 1/\ell)$ és l'interval de convergència de la sèrie de potències. Quan $\ell |x| = 1$ el criteri del quocient no decideix i llavors la convergència per a $x = \pm 1/\ell$ (els extrems de l'interval de convergència) no es pot determinar per aquest mètode.

Alternativament, es pot fer servir el criteri de l'arrel per determinar el radi de convergència, r , i això permet deduir que

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Exemple 1: Calcular el radi de convergència de $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Tenim que $a_n = 1$ per a tot n , i per tant el límit del quocient dels coeficients consecutius és també igual a 1, que serà, doncs, el radi de convergència. La sèrie és absolutament convergent quan $x \in (-1, 1)$. Per a $x = 1$ la sèrie és divergent, i per a $x = -1$, és oscil·lant.

Exemple 2: Calcular el radi de convergència de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

En aquest cas tenim que $a_n = 1/n!$ i per tant el radi de convergència és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n!}{1/(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = +\infty.$$

Així doncs, aquesta sèrie té radi de convergència infinit, i és absolutament convergent per a tot $x \in \mathbf{R}$.

Exemple 3: Calcular el radi de convergència de $\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n$.

Com $a_n = n^n$ en aquest cas fem servir el criteri de l'arrel. El radi de convergència ve donat per l'invers del límit següent:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty.$$

Com l'invers de $+\infty$ és 0 aquesta sèrie té radi de convergència zero i només és convergent a $x = 0$.

Exemple 4: Calcular el radi de convergència de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2x)^n}{n}$.

Tenim $|a_n| = \frac{2^n}{n}$ i per tant el radi de convergència és:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n/n}{2^{n+1}/(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

L'interval de convergència serà, doncs, $(-1/2, 1/2)$. En quant a la convergència als extrems d'aquest interval, per $x = 1/2$ obtenim la sèrie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ que d'acord amb el criteri de Leibniz és convergent. En canvi per a $x = -1/2$ s'obté la sèrie harmònica multiplicada per -1 que és divergent. En conclusió, el domini de convergència és $(-1/2, 1/2]$.

6.4 Derivació i integració de sèries de potències

Sigui una funció definida per una sèrie de potències $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ amb radi de convergència $r \neq 0$. Aleshores es verifiquen les propietats següents:

- La funció $f(x)$ és contínua a l'interval $(-r, r)$.
- La funció $f(x)$ és derivable a l'interval $(-r, r)$.
- La funció $f(x)$ és integrable a tot interval contingut a $(-r, r)$.

El càlcul de la derivada de $f(x)$ es fa derivant terme a terme la sèrie de potències i sumant el resultat. És a dir, s'aplica la propietat de que la derivada d'una suma de funcions és igual a la suma de derivades d'aquestes funcions. L'única particularitat és que en aquest cas la suma és infinita:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d(a_n x^n)}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1} + \dots$$

Per tant obtenim que la derivada d'una sèrie de potències és una nova sèrie de potències que ve donada per la fórmula següent:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (nx^{n-1}),$$

i que verifica la propietat següent:

- El radi de convergència de la sèrie de potències $f'(x)$ és el mateix que el de $f(x)$.

Igualment, el càlcul de la integral de $f(x)$ es fa integrant terme a terme la sèrie de potències i sumant el resultat. En aquest cas s'aplica que la integral d'una suma de funcions és igual a la suma de les integrals de cada funció, només que, evidentment, es tracta d'una suma infinita. Si l'interval (a, b) està contingut dintre de l'interval de convergència de la sèrie $(-r, r)$ aleshores:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

D'altra banda, la integració d'una sèrie de potències també pot definir una nova sèrie de potències de la manera següent:

$$\int_0^x f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \frac{x^n}{n} = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots$$

La integral d'una sèrie verifica la propietat següent:

- El radi de convergència de la sèrie de potències $\int_0^x f(x) dx$ és el mateix que el de $f(x)$.

Finalment, cal destacar que les sèries de potències obtingudes en derivar o en integrar $f(x)$ es poden derivar i integrar successivament donant lloc a noves sèries amb el mateix radi de convergència que $f(x)$.

- Tota sèrie de potències amb radi de convergència no nul és infinitament derivable i infinitament integrable, mantenint-se el radi de convergència inalterat amb aquestes operacions.

Exemple: Com coneixem l'expressió de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ com a sèrie de potències (secció 6.1), aleshores podem derivar i integrar $f(x)$ per trobar les sèries de potències de noves funcions:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \int_0^x f(x) dx = -\ln |1-x|,$$

i com $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ per $|x| < 1$, derivant i integrant la sèrie es dedueix respectivament que

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \text{quan } |x| < 1.$$

6.5 Sèries de potències generalitzades. Substitucions i canvis de variable

Fins ara hem treballat amb sèries de potències de x de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Donat un nombre real qualsevol a , es poden definir també sèries de potències de $x - a$ de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$. Aquestes sèries són més generals ja que contenen com a cas particular les sèries de potències de x (el cas $a = 0$). Per aquesta raó s'anomenen també sèries de potències generalitzades.

Si prenem $y = x - a$ aleshores obtenim una sèrie de potències de y que segons la teoria serà absolutament convergent quan $|y| < R$, essent R el seu radi de convergència. Desfent el canvi veiem doncs que la sèrie de potències de $x - a$ és absolutament convergent quan $|x - a| < R$, és a dir, quan

$$-R < x - a < R \Leftrightarrow a - R < x < a + R \Leftrightarrow x \in (a - R, a + R).$$

Podem enunciar el resultat general següent:

- Donada una sèrie de potències de x i una altra de $x - a$ amb els mateixos coeficients, aleshores ambdues tenen el mateix radi de convergència R . L'interval de convergència de la primera està centrat al zero i el de la segona a a , però la longitud de ambdós intervals és la mateixa.

El resultat anterior justifica que es parli de sèries centrades a l'origen (o al zero) i de sèries centrades en un punt $x = a$ per referir-se a les sèries de potències de x i $x - a$, respectivament.

La substitució que hem fet anteriorment $y = x - a$ es pot entendre també com un canvi de variable. Aquest no és l'únic canvi o substitució que podem fer per definir noves sèries de potències. Donat un nombre real b diferent de zero i un nombre enter k , a tota sèrie de potències del tipus $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ es pot fer una substitució general de la forma $y = b(x - a)^k$, definint una sèrie de potències generalitzada. Com que hi ha sèries que s'identifiquen amb funcions, aquest tipus de canvi de variable o substitució també es pot aplicar a les funcions per trobar la seva expressió mitjançant una sèrie de potències.

Exemple 1: Donada la funció $f(x) = \frac{1}{1 - b(x - a)}$ fem el canvi $y = b(x - a)$ i la funció obtinguda s'identifica immediatament amb la sèrie geomètrica. Desfent el canvi identificarem doncs $f(x)$ amb una sèrie de potències generalitzada:

$$f(x) = \frac{1}{1 - b(x - a)} = \frac{1}{1 - y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} b^n (x - a)^n.$$

Aquesta sèrie és absolutament convergent quan $|y| < 1$ (veure exemple 1 de 6.3) per tractar-se d'una sèrie geomètrica. Aleshores, substituint y tenim que $|b(x - a)| < 1$ y per tant que

$$|x - a| < \frac{1}{|b|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|b|} < x - a < \frac{1}{|b|} \Leftrightarrow a - \frac{1}{|b|} < x < a + \frac{1}{|b|}.$$

És a dir, que el radi de convergència és igual a $1/|b|$ i l'interval de convergència està centrat a $x = a$.

Exemple 2: Sigui $f(x) = \frac{1}{1 - bx^\alpha}$. En aquest cas és evident que farem la substitució $y = bx^\alpha$ per obtenir

$$f(x) = \frac{1}{1 - bx^\alpha} = \frac{1}{1 - y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} b^n x^{\alpha n}.$$

Seguint el mateix mètode de l'exemple anterior podem deduir el radi i l'interval de convergència de la sèrie que s'identifica amb $f(x)$, donat que és absolutament convergent per a:

$$|y| < 1 \Leftrightarrow |bx^\alpha| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{|b|^{1/\alpha}}.$$

Exemple 3: Les sèries geomètriques no són les úniques on es poden fer substitucions evidentment. Per exemple, la sèrie de $\ln(1 - x)$ quan $x \in (-1, 1)$ es va obtenir a 6.4 per integració de la sèrie geomètrica. Per obtenir doncs la sèrie de $\ln(1 + x)$ només cal fer el canvi $y = -x$:

$$\ln(1 + x) = \ln(1 - y) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

La sèrie és absolutament convergent quan $|y| < 1$ i com que $|y| = |-x| = |x|$ això és equivalent a la condició $|x| < 1$.

7 Desenvolupament en sèrie de Taylor

A la secció anterior hem vist que existeixen funcions que es poden identificar amb sèries de potències al menys en un cert interval de la recta real. Tanmateix no sabem si això es pot fer per a qualsevol funció i en cas de que es pugui fer de quina manera es pot trobar la sèrie que correspon a cada funció. Finalment, ignorem també si una funció pot identificar-se amb més d'una sèrie de potències o no. En aquesta secció exposarem els resultats teòrics que permeten donar resposta a totes aquestes qüestions.

7.1 Fórmula de Taylor

Si trunquem una sèrie de potències y prenem només un nombre finit de termes obtenim un polinomi. Quan una funció s'identifica amb una sèrie, al truncar la sèrie obtenim una certa aproximació del valor real de la funció. Podriem dir, doncs, que un primer pas per identificar una funció amb una sèrie de potències és poder aproximar aquesta funció mitjançant un polinomi. El teorema següent ens diu de quina manera i en quines condicions és possible fer aquesta aproximació.

- **Teorema 2:** Sigui $f(x)$ una funció $N + 1$ vegades derivable en un cert interval obert I de la recta real i sigui $a \in I$ un punt d'aquest interval. Sigui $P(x)$ un polinomi de grau no superior a N que pren el mateix valor que $f(x)$ a $x = a$ i tal que les seves derivades fins a ordre N inclòs prenen també el mateix valor que les derivades del mateix ordre de $f(x)$ al punt $x = a$,

$$P(a) = f(a), \quad P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a), \quad \forall n = 1, \dots, N.$$

Aleshores l'expressió del polinomi $P(x)$ és:

$$P(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(N)}(a)}{N!} (x-a)^N.$$

El polinomi $P(x)$ s'anomena polinomi de Taylor de grau N de la funció $f(x)$ en el punt $x = a$, i normalment es fa servir la notació $P_N(f, a, x)$ per representar-lo. Tenint en compte les condicions que verifica aquest polinomi, és fàcil adonar-se de que proporciona una expressió aproximada del valor de la funció $f(x)$ a l'entorn del punt $x = a$. Aquesta aproximació serà millor com més gran sigui el grau del polinomi (és a dir, el valor d' N).

El primer pas per poder identificar una funció amb una sèrie de potències és introduir l'anomenada funció residu (o terme complementari), $R_N(f, a, x)$, que ens dóna la diferència entre els valors de $f(x)$ i el seu polinomi de Taylor de grau N a $x = a$:

$$R_N(f, a, x) = f(x) - P_N(f, a, x).$$

Observem que si prenem el límit quan $N \rightarrow \infty$ del polinomi de Taylor obtenim una sèrie de potències (sempre que $f(x)$ sigui infinitament derivable a $x = a$):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(f, a, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n. \quad (1)$$

D'altra banda, com $f(x)$ no depèn de N , $\lim_{N \rightarrow \infty} f(x) = f(x)$, i per tant, la diferència entre $f(x)$ i el límit del seu polinomi de Taylor quan N tendeix a infinit és igual al límit de la funció residu

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N(f, a, x) = f(x) - \lim_{N \rightarrow \infty} P_N(f, a, x). \quad (2)$$

Aquesta igualtat depèn evidentment de a i de f però també de x . Donat un punt a i una funció f infinitament derivable en aquest punt, el conjunt de valors de x tals que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N(f, a, x) = 0$$

permet identificar $f(x)$ amb la sèrie de potències (1), anomenada desenvolupament en sèrie de Taylor de $f(x)$, o simplement, la sèrie de Taylor d'aquesta funció en l'entorn del punt a . Enunciem a continuació amb més detall aquest resultat tan important.

- **Teorema 3:** Sigui $f(x)$ una funció infinitament derivable en un interval obert I de la recta real, i $a \in I$. Per a tot nombre real x tal que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N(f, a, x) = 0$$

es compleix que:

1. La sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

és convergent, és a dir, x pertany a l'interval de convergència d'aquesta sèrie.

2. El valor de la funció $f(x)$ és igual a la suma d'aquesta sèrie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Resumint, una funció és igual a la seva sèrie de Taylor per als valors de x tals que el límit de la funció residu és igual a zero. A més a més, aquests valors de x sempre han de pertànyer a l'interval de convergència de la sèrie de Taylor. D'altra banda, cal precisar que poden haver-hi valors de x per als quals el límit de la funció residu no sigui zero, i tanmateix la sèrie de Taylor podria ser convergent en aquest valors. Si això passa, però, el que és segur és que el valor de la funció f no serà igual a la suma de la sèrie de Taylor (veure la igualtat (2)).

Per poder establir quins valors de x permeten identificar una funció amb la seva sèrie de Taylor és fonamental tenir una expressió de la funció residu que ens permeti trobar el seu límit quan N tendeix a infinit. Aquesta qüestió queda resolta per l'anomenat teorema de Taylor.

- **Teorema 4 (de Taylor):** Si $f(x)$ és $N+1$ vegades derivable a l'interval obert de la recta real I , i $a \in I$, aleshores per a tot $x \in I$ existeix un nombre real z comprès entre x i a tal que

$$R_N(f, a, x) = \frac{f^{(N+1)}(z)}{(N+1)!} (x-a)^{N+1}.$$

Aquesta expressió de la funció residu es coneix com a fórmula de Lagrange. D'altra banda, en les condicions del teorema anterior podem escriure la funció $f(x)$ de la manera següent:

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{f^{(N+1)}(z)}{(N+1)!} (x-a)^{N+1},$$

que s'anomena fórmula de Taylor de f a l'entorn de $x = a$.

Podem veure, doncs, que la fórmula de Lagrange de la funció residu permet conèixer la magnitud de l'error comès quan aproximem una funció pel seu polinomi de Taylor a l'entorn d'un punt donat a . Encara que no puguem determinar quin és el valor exacte de z (i per tant el valor exacte de l'error), sí que podem acotar l'error comès si som capaços d'acotar el valor de $f^{(N+1)}(z)$ d'alguna manera. Això dependrà de l'expressió concreta de la funció f , de x i de a (donat que z està comprès entre ambdós). Una manera d'escriure la dependència de z amb x i a és prendre:

$$z = a + \theta(x-a), \quad 0 < \theta < 1.$$

Aleshores, per al cas $a = 0$ la fórmula de Taylor pren la forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(N+1)}(\theta x)}{(N+1)!} x^{N+1},$$

que a molts llibres es coneix com a fórmula de Maclaurin.

Es pot dir que amb els teoremes 2, 3 i 4 queden resoltes les qüestions de com i quan s'identifica una funció qualsevol amb una sèrie de potències. Tanmateix encara hi ha un aspecte que no hem considerat. Un cop que sabem que una funció és igual a la seva sèrie de Taylor a l'entorn d'un cert punt i per a quins punts de la recta real és vàlida aquesta igualtat, ens podem demanar si la sèrie de Taylor és la única sèrie de potències que és igual a la funció o si n'hi ha d'altres. La resposta a aquesta pregunta la dona el teorema següent que estableix la unicitat del desenvolupament en sèrie de Taylor.

- **Teorema 5:** Sigui $f(x)$ una funció infinitament derivable en un interval obert de la recta real I , i sigui $a \in I$. Si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

aleshores

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad \forall n.$$

És a dir, l'única sèrie de potències que es pot identificar amb una funció és la sèrie de Taylor d'aquesta funció. La demostració d'aquest teorema és bastant senzilla. Si calculem les derivades successives de $f(x)$ fent servir la sèrie de potències obtenim:

$$\begin{aligned}f(x) &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots, \\f'(x) &= a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots + na_n(x-a)^{n-1} + \dots, \\f''(x) &= 2a_2 + 3 \cdot 2 a_3(x-a) + \dots + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} + \dots,\end{aligned}$$

i, en general,

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 a_n + O(x-a), \quad \forall n > 0.$$

Per tant, substituïnt x per a a les igualtats anteriors obtenim:

$$f^{(n)}(a) = n! \cdot a_n,$$

d'on es dedueix l'expressió dels coeficients a_n , comprovant-se que són iguals als de la sèrie de Taylor de $f(x)$ al voltant de $x = a$.

7.2 Sèries de Taylor de les funcions elementals

La teoria desenvolupada a la secció anterior dona lloc a un mètode per trobar la sèrie de Taylor d'una funció concreta. Primer hem de deduir la fórmula de Taylor de la funció al voltant d'un punt i escriure l'expressió de la funció residu mitjançant la fórmula de Lagrange. Un cop fet això es tracta d'acotar la funció residu i trobar els valors de x per als quals el seu límit quan N tendeix a infinit dona zero. Repetir aquest procediment per a totes les funcions pot ser bastant feixuc. De fet no cal fer-ho ja que, com hem vist als apartats 6.4 i 6.5 hi ha operacions que permeten deduir la sèrie de Taylor de noves funcions a partir de les ja conegudes. La derivació, la integració i els canvis de variable no són, de fet, les úniques tècniques de què disposem. També es poden fer servir operacions com la suma, el producte o la composició de sèries com a funcions per deduir les sèries de Taylor de noves funcions. Ens ocuparem d'això a la secció següent.

En aquest apartat ens centrarem en l'obtenció de les sèries de Taylor de funcions elementals tals com $\sin(x)$, $\cos(x)$, l'exponencial i les funcions binomials del tipus $(1+x)^\alpha$ amb α un nombre real qualsevol. A partir d'elles es pot deduir la sèrie de Taylor de la majoria de funcions conegudes. Recordem que al capítol 6 ja vam obtenir la sèrie de Taylor d'algunes funcions elementals. Per exemple, la sèrie geomètrica és la sèrie de Taylor de la funció $1/(1-x)$, per a $|x| < 1$. Integrant aquesta sèrie i fent un canvi de variable vam obtenir, respectivament, les sèries de Taylor de $\ln(1-x)$ i $\ln(1+x)$, també vàlides per a $|x| < 1$.

7.2.1 Acotació del residu fent servir la fórmula de Lagrange

Mitjançant la fórmula de Lagrange (teorema 4) podem veure fàcilment que si acotem el valor de $f^{(N+1)}(z)$ aleshores podem acotar la funció residu. Això ens pot servir per

calcular el límit d'aquesta funció quan $N \rightarrow \infty$. Efectivament, donades una funció f i un punt a suposem que existeixi una constant C (que pot dependre del valor de x però no pas de N) que ens dóna el màxim valor de $|f^{(N+1)}(z)|$ quan z es troba entre a i un x donat,

$$C = \max_{z \in \langle a, x \rangle} |f^{(N+1)}(z)|. \quad (3)$$

On $\langle a, x \rangle$ representa l'interval obert més petit que conté x i a (és a dir, $\langle a, x \rangle = (a, x)$ si $a < x$, i $\langle a, x \rangle = (x, a)$ si $x < a$). Llavors, la funció residu es podrà acotar de la manera següent:

$$|R_N(f, a, x)| \leq C \frac{|x - a|^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Si considerem la successió de terme general $A_N = |x - a|^{N+1}/(N+1)!$, ens adonem que si té límit zero, aleshores el límit del valor absolut de la funció residu serà zero també, i això implica que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N(f, a, x) = 0,$$

que és el resultat que voldriem establir.

- Fent servir el criteri del quocient per a successions es pot demostrar que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} A_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|x - a|^{N+1}}{(N+1)!} = 0.$$

En efecte,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A_{N+1}}{A_N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|x - a|^{N+1} N!}{|x - a|^N (N+1)!} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|x - a|}{N+1} = 0,$$

per a qualsevol valor de a i de x donats. Segons el criteri del quocient, això implica que $\lim_{N \rightarrow \infty} A_N = 0$.

Hi ha funcions per a les quals es pot trobar la constant C (definida a la fórmula (3)) per a qualsevol valor de x . En aquests casos el desenvolupament de Taylor és vàlid per a tot nombre real. Això passa amb les funcions exponencial, sinus i cosinus com comprovarem a continuació.

7.2.2 Sèries de Taylor de $\sin(x)$ i $\cos(x)$

Per obtenir la sèrie de Taylor al voltant del zero de la funció $\sin(x)$ primer construirem el seu polinomi de Taylor en aquest punt (amb grau qualsevol). Derivant obtenim que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x), & f(0) &= 0, \\ f'(x) &= \cos(x), & f'(0) &= 1, \\ f''(x) &= -\sin(x), & f''(0) &= 0, \\ f'''(x) &= -\cos(x), & f'''(0) &= -1, \\ f^{(4)}(x) &= \sin(x) = f(x), & f^{(4)}(0) &= 0 = f(0). \end{aligned}$$

Es veu doncs que les derivades es repeteixen periòdicament i que les derivades d'ordre parell són nul·les i les d'ordre senar valen 1 o -1 . Tenim que

$$\begin{aligned} f^{(2n)}(x) &= (-1)^n \sin x, & f^{(2n)}(0) &= 0, \\ f^{(2n+1)}(x) &= (-1)^n \cos x, & f^{(2n+1)}(0) &= (-1)^n. \end{aligned}$$

Si N és senar, aleshores com els termes de grau parell del polinomi de Taylor són nuls es dedueix que $P_N(\sin x, 0, x) = P_{N+1}(\sin x, 0, x)$ i obtenim l'expressió següent per al polinomi de Taylor:

$$P_{N+1}(\sin x, 0, x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{\frac{(N-1)}{2}}}{N!} x^N = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

La fórmula de Lagrange ens permet trobar l'expressió del residu

$$R_{N+1}(\sin x, 0, x) = \frac{(-1)^{\frac{N+1}{2}} \cos(z) x^{N+2}}{(N+2)!}.$$

Es pot fer servir tant el residu $N+1$ com el N ja que el que interessa finalment és el límit d'aquesta funció quan N tendeix a infinit. Recordem que z és un nombre real que en aquest cas es troba entre 0 i x . És fàcil acotar la funció residu donat que per tot nombre real z

$$|(-1)^{\frac{N+1}{2}} \cos(z)| \leq 1,$$

i per tant

$$|R_{N+1}(\sin x, 0, x)| \leq \frac{|x|^{N+2}}{(N+2)!}.$$

Com hem vist a la secció anterior, quan N tendeix a infinit la successió que acota el residu tendeix a zero per a tot x , i aleshores el residu també, de manera que es dedueix la següent sèrie de Taylor (fent el límit $N \rightarrow \infty$ del polinomi de Taylor):

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots,$$

vàlida per a tot nombre real x , ja que el residu es pot acotar sempre de la mateixa forma per a tot x . Dit d'una altra manera, el radi de convergència de la sèrie de Taylor de $\sin(x)$ és infinit.

La sèrie de Taylor de $\cos(x)$ s'obté senzillament derivant la sèrie de $\sin(x)$ respecte a x ,

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},$$

que d'acord amb la teoria explicada a 6.4 conserva el mateix radi de convergència, és a dir, aquesta sèrie és igualment vàlida per a tot nombre real x .

7.2.3 Sèrie de Taylor de e^x

Per a aquesta funció es comprova fàcilment que

$$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1, \quad \forall n \geq 0.$$

Per tant, el polinomi de Taylor de grau N al voltant del zero és

$$P_N(e^x, 0, x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^N}{N!} = \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!},$$

i el residu s'escriu de la manera següent

$$R_N(e^x, 0, x) = \frac{e^z x^{N+1}}{(N+1)!},$$

on z es troba entre 0 i x . Per tant escrivim $z = \theta x$ amb $0 < \theta < 1$.

D'aquesta manera veiem que per a $x > 0$, com l'exponencial és una funció creixent i positiva, $e^{\theta x} < e^x$, de manera que

$$|R_N(e^x, 0, x)| < e^x \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Fixat un valor de x , el valor de e^x serà una constant que multiplica a una expressió que tendeix cap a zero quan N tendeix a infinit. Aleshores el residu també tendeix cap a zero.

D'altra banda, per a $x < 0$ l'exponencial sempre és inferior a l'unitat, $e^{\theta x} < 1$, amb la qual cosa

$$|R_N(e^x, 0, x)| < \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!},$$

i de nou veiem que el residu tendeix a zero quan $N \rightarrow \infty$.

Per tant, hem establert que per a tot nombre real x la sèrie de Taylor de la funció exponencial és

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

7.2.4 Sèrie binomial

Considerem la funció $f(x) = (1+x)^\alpha$ on α és un nombre real qualsevol. Calculem el polinomi de Taylor a l'entorn de $x = 0$, $P_N(x)$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1}, & f'(0) &= \alpha, \\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, & f''(0) &= \alpha(\alpha-1), \end{aligned}$$

i, en general,

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha - n}, \quad f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1).$$

$$P_N(f, 0, x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - N + 1)}{N!}x^N.$$

Per abreujar farem servir la notació binomial,

$$\binom{\alpha}{N} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - N + 1)}{N!},$$

ja que en el cas que α sigui un nombre natural, els coeficients del polinomi de Taylor de $(1 + x)^\alpha$ són els mateixos que s'obtenen d'aplicar la fórmula del binomi de Newton.

En aquest cas no farem servir la funció residu per deduir el rang de validesa de la sèrie de Taylor, ja que resulta massa complicat fer la acotació del residu. Es pot demostrar que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(f, 0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1 + x)^\alpha, \quad (4)$$

per a tot x que estigui dintre de l'interval de convergència de la sèrie de Taylor. Calculem, doncs, el radi de convergència de la sèrie que apareix a la fórmula (4):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \binom{\alpha}{n} \right|}{\left| \binom{\alpha}{n+1} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{|\alpha - n|} = 1.$$

Per tant, tenim que

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \dots,$$

per a $|x| < 1$.

7.3 Operacions amb sèries

Existeixen mètodes alternatius per derivar la sèrie de Taylor d'una funció que no exigeixen l'acotació i l'estudi de la funció residu. La derivació i la integració en són un exemple, i els canvis de variable un altre. En aquesta secció descriurem les diverses operacions entre sèries de potències que es poden fer servir per deduir sèries de Taylor de funcions de forma relativament ràpida i sense fer servir el polinomi de Taylor ni la funció residu.

7.3.1 Combinació lineal de sèries

Donades dues constants α i β reals o complexes, l'operació

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n,$$

s'anomena combinació lineal de sèries de potències. Inclou la suma i la diferència entre dues sèries i el producte d'una constant per una sèrie. La sèrie resultant tindrà un interval de convergència que serà l'intersecció dels intervals de convergència de les sèries que estem operant.

Exemple: Trobar el desenvolupament de Taylor al voltant de l'origen de les funcions $\sinh(x)$ i $\cosh(x)$.

Recordem que aquestes funcions es poden definir mitjançant exponencials:

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

És a dir, podem trobar la sèrie de Taylor de les funcions hiperbòliques fent una combinació lineal de sèries d'exponencials. Sabem que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

i substituint x per $-x$ en l'expressió anterior obtenim:

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

que també té radi de convergència infinit donat que $|x| = |-x|$. Fent les combinacions lineals corresponents resulta:

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Donat que estem operant sèries amb radi de convergència infinit, el resultat és que les sèries de Taylor de les funcions hiperbòliques també tenen radi de convergència infinit.

Exercici: Demostrar la fórmula d'Euler

$$\cos(x) + i \sin(x) = e^{ix}.$$

Atenció: En aquest exercici heu de considerar que la unitat imaginària dels nombres complexos, $i = \sqrt{-1}$, es pot manipular com si fos una constant real. La teoria de les sèries de potències amb variable complexa cau més enllà de l'àmbit d'aquest curs. De fet, però, és molt semblant a la que hem desenvolupat en aquest tema. Els mateixos teoremes són certs per a x complex prenent $|x|$ com a mòdul del nombre complex x . Les sèries del $\sin(x)$, $\cos(x)$ i e^x que hem donat són vàlides per a tot x complex, en particular per a ix .

7.3.2 Multiplicació i divisió de sèries

El producte de dues sèries no es pot realitzar terme a terme. Dues sèries convergents multiplicades d'aquesta manera podrien donar com a resultat una sèrie divergent. Això ja ho varem comentar al capítol 5 quan parlàvem de les sèries numèriques. El producte entre sèries s'ha de realitzar de la mateixa manera que el producte entre polinomis (amb la diferència que ara els polinomis no tenen un grau finit). Per tant tenim que el producte de sèries es defineix de la manera següent:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \right) x^n.$$

Si ho escrivim amb detall tenim que:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \dots$$

Es pot veure, doncs, que l'operació és similar a fer el producte de dos polinomis com ja hem dit. L'interval de convergència de la sèrie producte és igual a la intersecció dels intervals de convergència de les sèries multiplicades.

Exemple: Trobar el desenvolupament de Taylor al voltant del zero de la funció $e^x \cos(x)$ fins a grau 4 inclòs.

Es tracta de fer el producte de les sèries de Taylor de e^x i $\cos(x)$. Com ambdues tenen radi de convergència infinit el resultat també el tindrà. Utilitzant la fórmula anterior podem derivar els primers termes que ens demanen:

$$\begin{aligned} e^x \cos(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots \right) = \\ &= 1 + x + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) x^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) x^3 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24} \right) x^4 + O(x^5) = \\ &= 1 + x - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{6} x^4 + O(x^5). \end{aligned}$$

Per definir la divisió entre sèries s'ha de tenir en compte que aquesta operació és la inversa del producte. Per tant es verifica la relació següent:

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \right).$$

Tenint en compte les fórmules que coneixem per al producte de sèries, es dedueixen les igualtats següents que ens permeten calcular els coeficients d_i de la sèrie resultat de la divisió,

$$\begin{aligned} a_0 = b_0 d_0 &\Rightarrow d_0 = \frac{a_0}{b_0}, \\ a_1 = b_0 d_1 + b_1 d_0 &\Rightarrow d_1 = \frac{1}{b_0} (a_1 - b_1 d_0), \\ a_2 = b_0 d_2 + b_1 d_1 + b_2 d_0 &\Rightarrow d_2 = \frac{1}{b_0} (a_2 - b_1 d_1 - b_2 d_0), \end{aligned}$$

i, en general,

$$a_n = \sum_{i=0}^n b_i d_{n-i} \Rightarrow d_n = \frac{1}{b_0} \left(a_n - \sum_{i=1}^n b_i d_{n-i} \right).$$

Segons es pot veure a les relacions anteriors, si $b_0 = 0$ aleshores no podrem fer la divisió car els coeficients d_i no estaran definits. Igualment el quocient no es pot calcular si hi ha valors de x pels quals la sèrie del denominador s'anulla. Es compleixen, doncs, les propietats següents:

- El quocient entre dues sèries està definit i dóna lloc a una altra sèrie de potències si i només si el terme de grau zero de la sèrie del denominador és diferent de zero.
- El radi de convergència de la sèrie resultat de fer la divisió entre dues sèries no es pot estendre més enllà del mínim valor de x per al qual s'anulla la sèrie del denominador.

Observem que quan $x = 0$ aleshores la suma de qualsevol sèrie és igual al seu terme de grau zero. Per tant, la primera de les propietats que acabem d'enunciar és equivalent a dir que la sèrie del denominador no es pot anul·lar a $x = 0$.

Exemple: Trobar el desenvolupament de Taylor al voltant de l'origen fins a ordre 4 inclòs de la funció $\tan x$.

Aquest és un exemple bastant típic de quocient entre sèries car

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Fem notar que $\cos(0) = 1 \neq 0$ i per tant la divisió entre les sèries del sinus i el cosinus es pot calcular. D'altra banda, els primers zeros del denominador es troben a $\pi/2$ per $x > 0$ i a $-\pi/2$ per $x < 0$. De manera que l'interval de convergència de la sèrie de Taylor de $\tan x$ serà $(-\pi/2, \pi/2)$. Apliquem les fórmules anteriors per trobar aquesta sèrie. Primer agafem els coeficients fins a ordre 4 de les sèries que anem a dividir:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6).$$

On el terme de grau zero del denominador val 1 i això simplifica els càlculs. Si fem ara

$$\tan x = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n,$$

aleshores tenim que:

$$d_0 = 0, \quad d_1 = 1, \quad d_2 = 0, \quad d_3 = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}, \quad d_4 = 0,$$

i el resultat que es demana serà:

$$\tan x = x - \frac{x^3}{3} + O(x^5).$$

7.3.3 Composició de sèries de potències: substitucions un altre cop

Recordem que una de les operacions més habituals entre funcions és la composició: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Donat que les sèries de potències defineixen funcions, és natural plantejar-se de quina manera es defineix la composició de sèries enteses com a funcions i en quines condicions es poden compondre les sèries. El teorema següent s'ocupa de resoldre aquesta qüestió.

- **Teorema 6:** Donades dues sèries de potències: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ amb radi de convergència r i $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ amb radi de convergència r' , aleshores la composició de les funcions f i g defineix una nova sèrie de potències:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

si i només si $g(0) = 0$ (és a dir, si la sèrie de $g(x)$ comença per $n = 1$, ja que $g(0) = b_0$). El radi de convergència de $(f \circ g)(x)$ és el mínim entre els radis de convergència de cadascuna de les sèries $f(x)$ i $g(x)$.

En general, la relació entre els coeficients a_n , b_n i c_n és bastant complicada i no resulta interessant. El que sí és important és adonar-se que certes substitucions i

canvis de variable són en realitat casos particulars de composició entre sèries. De fet, el teorema anterior estableix quins són els canvis de variable o les substitucions que es poden fer a una sèrie de potències de x per obtenir noves sèries de potències de x . Dit d'una altra manera, podem determinar els canvis de variable admissibles entre sèries de Taylor al voltant del zero.

En efecte, si tenim una sèrie de potències $f(y)$, per poder fer un canvi de variable de la forma $y = g(x)$, o el que és igual, substituir y per una certa funció $g(x)$, s'ha de verificar que $g(0) = 0$ ja que si fem la substitució el que obtenim és, teòricament, una composició entre sèries $f(y) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$, que ha de verificar les condicions del teorema 6.

Per exemple, si a la sèrie de potències:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$$

substituïm la x per x^2 obtenim la sèrie de potències d'una nova funció:

$$f(x^2) = F(x) = \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \dots$$

Això és com fer la composició de la sèrie $f(x)$ amb $g(x) = x^2$. Evidentment, la darrera funció és idèntica a la seva sèrie de Taylor ja que és un polinomi en x , essent el seu radi de convergència infinit. Per tant els radis de convergència de f i F seran iguals (el mínim entre infinit i el radi de convergència de f és igual al radi de convergència de f).

D'altra banda, s'ha de tenir en compte que no totes les substitucions que es poden fer a una sèrie de potències corresponen a composicions de sèries de la manera que s'ha descrit al teorema 6. Per exemple, un canvi de variable del tipus $y = x - a$ transforma una sèrie de potències de x (al voltant del zero) en una sèrie de potències generalitzada (al voltant de $x = a$). Aquest canvi no és cap composició de sèries ja que es barregen sèries de potències al voltant de punts diferents, i al teorema 6 només s'operen sèries de potències de x . Tanmateix aquest canvi és admissible com ja es va explicar a la secció 6.5. Per exemple, si a la sèrie de Taylor

$$f(y) = \frac{1}{1+y} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n,$$

fem el canvi $y = x - 1$ obtenim una sèrie de Taylor al voltant de $x = 1$. Aquesta nova sèrie, però, no correspon a la funció $1/(1+x)$ sinó a la funció $f(y) = f(x-1) = 1/x$. Si fem la substitució correctament en la expressió anterior obtenim

$$f(y) = f(x-1) = \frac{1}{1+(x-1)} = \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n,$$

que efectivament és la sèrie de Taylor al voltant de $x = 1$ de la funció $1/x$. Com la sèrie inicial de $f(y)$ és vàlida per a $|y| < 1$, aleshores la sèrie final de $1/x$ serà vàlida per a $|x - 1| < 1$, és a dir, $\forall x \in (0, 2)$.

Exemple: Fent servir la composició entre sèries trobeu el desenvolupament de Taylor de la funció $\cos(\sin x)$ al voltant del zero i fins a ordre 4 inclòs.

La sèrie de la funció $\cos(\sin x)$ es pot trobar composant la sèrie de $\cos x$ amb la de $\sin x$, car es compleix la condició del teorema 6, $\sin(0) = 0$. Per contra, si ens demanessin fer el mateix amb la funció $\sin(\cos x)$ no es podria realitzar la composició ja que $\cos(0) \neq 0$.

Com que ens demanen el desenvolupament fins a grau 4 partim dels desenvolupaments corresponents a les funcions que composarem fins al mateix ordre:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6).$$

Ara en el $\cos x$ hem de substituir la x per $\sin x$,

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^4}{24} + O((\sin x)^6).$$

Finalment substituïm $\sin x$ pel desenvolupament que hem escrit abans,

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) \right)^2 + \frac{1}{24} \left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) \right)^4 + O(x^6).$$

Ara hem de fer el quadrat i la potència quarta, però com només ens demanen el desenvolupament fins a ordre 4, els termes de grau superior no cal tenir-los en compte, aleshores obtenim:

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + O(x^5) \right) + \frac{1}{24} (x^4 + O(x^5)) + O(x^6).$$

Per acabar només cal agrupar els termes de la mateixa potència, i el resultat final és

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^5) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + O(x^5).$$